Gráf 3 színezés-> 3 tagú DNF

Legyen adott $G = (V, E)$ gráf $V = \{1 \ldots n\}$ csúcshalmazzal és $E \subseteq VxV$ élhalmazzal.

Színezés:

3 színnel színezhető úgy, hogy $\forall$ $(i, j) \in E$-re i és j más színt kap.

3 tagú DNF:

$(l_{11} \wedge\ l_{22} \wedge \ldots 1_{1k}) \vee T_2 \vee T_3$ alakú kifejezés ahol 3 klóz van vagyolva és a klózon belül a literálok éselve szerepelnek.

Ötlet:

Legyen minden klóz egy-egy színosztály (R,G,B) és bármely két szomszédos csúcs egy példa amire nem lehet igaz a DNF. Írjuk át a gráfot a példák szerint, ahol a példák azt jelentik, hogy melyik változó milyen értéket fog kapni. Tehát írjuk át a gráfot két különböző halmazzá.

S+ halmaz (pozitív példák, ezekre teljesülnie kell a DNF-nek):

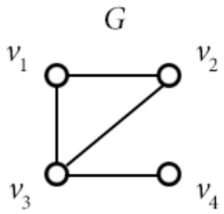
$n = |V|$ for each $v(i) \in V$-re legyen 0 az i. pozíció értéke, és 1 az összes többié tehát ha 4 csúcsú a gráfunk, akkor az S+ halmaz a következőképpen néz ki.

$$(0,1,1,1)$$
$$(1,0,1,1)$$
$$(1,1,0,1)$$
$$(1,1,1,0)$$

S- halmaz (negatív példák, ezekre nem szabad teljesülnie a DNF-nek):

$n = |V|$ for each $(i, j) \in E$-re legyen 0 az i. és a j. helyen és 1 az összes többin.

Példa 1:



S^+	S^-
(0,1,1,1)	(0,0,1,1)
(1,0,1,1)	(0,1,0,1)
(1,1,0,1)	(1,0,0,1)
(1,1,1,0)	(1,1,0,0)

Példa2:

Éllista: {(1,3), (1,4), (2,5), (3,5), (4,5)}:

S^+ = {01111, 10111, 11011, 11101, 11110}

S^- = {01011, 01101, 10110, 11010, 11100}

S halmaz:

Legyen $S = S^+ \cup S^-$ ahol S^+ a fent tárgyalt S+ halmaz és S^- szintén a fentebb megtalálható S- halmaz.

Állítás:

A gráf 3 színezhető akkor és csak akkor, ha az S+ és S- példák konzisztensek valamely φ 3 tagú DNF-el.

Bizonyítás egyik oldalról (ha G 3 színezhető, akkor megadható 3DNF ami konzisztens S-el):

Tfh. G 3 színezhető. Konstruáljuk meg hozzá az $S =$ halmazt ez előzőek szerint. Ezután adjunk a színezéshez egy 3 tagú DNF-et amely konzisztens S-el a következőképpen:

Minden színre legyen T_{color} egy olyan klóz amelyben az adott színnel ki nem színezett csúcsok vannak összeéselve, tehát:

$C = \{R, G, B\}$ és $for(c\ in\ C)\ legyen\ T_c = \wedge_{i\ not\ colored\ c}\ x_i$

A 3 tagú DNF kifejezésünk pedig legyen a következő:

$$T_R \vee T_G \vee T_B$$

Ha tekintjük a Példa2-t akkor az ehhez tartozó DNF az RBBBG színezéshez az $x_2x_3x_4x_5 \vee x_1x_5 \vee x_1x_2x_3x_4$ lesz.

Megmutatjuk, hogy ez a DNF konzisztens az S-el. Megmutatható hogy S+ halmaz esetén minden példa kielégíti a DNF-et, mivel ahol az i. igazságérték 0, mindig kielégíti azt a klózt, amelybe nem esik bele az i, vagyis azt, amelyik színnel az i. csúcsot színeztük. Az S- halmaz esetén pedig mindegyik példa sérteni fog minden színhez tartozó klózt, mivel ahol ij=0 (az a példa, ami az i-j élt reprezentálja tehát ahol az i. és a j. komponens 0) sérti az i színének a klózát mivel tartalmazza a j-t. Sérti a j színének a klózát mivel tartalmazza az i-t. És végül sérti a harmadik szín klózát is, mert az tartalmazza az i-t és a j-t is.

Bizonyítás másik oldalról (Ha rendelkezünk egy 3 tagú DNF-el ami konzisztens az S halmazzal akkor létezik 3 színezés, amely az S halmazhoz tartozó gráfot helyesen színezi):

Az i. csúcsot színezzük R színnel. ha a T_r klózt elégíti ki az i. helyen nullát tartalmazó példa, színezzük G színnel ha a T_G-t és B színnel ha a T_B-t. Egy példa több klózt is kielégíthet így a színezés nem mindig egyértelműen meghatározott, de ez számunkra jelen esetben nem lényeges. Azt kell belátnunk hogy ebben az esetben a szomszédos csúcsok nem lesznek ugyanazzal a színnel színezve. Tegyük fel hogy ugyanazzal vannak, ekkor mind az i csúcshoz mind a j csúcshoz tartozó S+ beli példa kielégíti ugyanazt a klózt. Mivel az i. és j. csúcshoz tartozó két pozitív példa különbözik az i. és a j. pozíción egymástól, ebből következik, hogy x_i és x_j (az i. és a j. csúcshoz tartozó változók) nem fordulhatnak elő az adott klózban sem negálva sem negálatlanul, különben a hozzátartozó S+ beli példa sértené a klózt. De ekkor (mivel x_i; $\neg x_i$; x_j; $\neg x_j$ nem szerepel az egyik klózban) az S- halmazban szereplő példa ahol i és j is 0, szintén kielégítené és így a DNF nem konzisztens S-el. Ez ellentmondás tehát bizonyítottuk a másik oldalt is.