**9. gyakorlat**

# Dualitás lehetséges esetei

## 1. A primál nem korlátos, a duálnak nincs lehetséges megoldása

**Primál feladat:**

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 4 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & \leq & 3 \\ \hline 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \to & \max. \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ x_5 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_6 & = & 3 & - & 3x_1 & & & + & x_3 \\ \hline z(x) & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \end{array}$$

A primál feladat nem korlátos, mert van olyan pozitív célfüggvény együttható, melyhez csak pozitív feltételek tartoznak.

**Duál feladat:**

Vegyük fel a duál feladatpárt:

$2x_1+x_2+x_3 \leq y_1(x_1+2x_2-x_3)+y_2(2x_1-x_2-2x_3)+y_3(3x_1-x_3) \leq 5y_1+4y_2+3y_3$

$$\begin{array}{rcrcrcl} y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \geq & 2 \\ 2y_1 & - & y_2 & & & \geq & 1 \\ -y_1 & - & 2y_2 & - & y_3 & \geq & 1 \\ \hline 5y_1 & + & 4y_2 & + & 3y_3 & \to & \min. \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rcrcrcl} -y_1 & - & 2y_2 & - & 3y_3 & \leq & -2 \\ -2y_1 & + & y_2 & & & \leq & -1 \\ y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \leq & -1 \\ \hline -5y_1 & - & 4y_2 & - & 3y_3 & \to & \max. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} -y_1 & - & 2y_2 & - & 3y_3 & - & y_0 & + & y_4 & & & & & = & -2 \\ -2y_1 & + & y_2 & & & - & y_0 & & & + & y_5 & & & = & -1 \\ y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & - & y_0 & & & & & + & y_6 & = & -1 \\ \hline w(y) & = & & & & - & y_0 & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} y_0 & = & 2 & - & y_1 & - & 2y_2 & - & 3y_3 & + & y_4 \\ y_5 & = & 1 & + & y_1 & - & 3y_2 & - & 3y_3 & + & y_4 \\ y_6 & = & 1 & - & 2y_1 & - & 4y_2 & - & 4y_3 & + & y_4 \\ \hline w(y) & = & -2 & + & y_1 & + & 2y_2 & + & \underline{3y_3} & - & y_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} y_0 & = & \frac{5}{4} & + & \frac{1}{2}y_1 & + & y_2 & + & \frac{1}{4}y_4 & + & \frac{3}{4}y_6 \\ y_5 & = & \frac{1}{4} & + & \frac{5}{2}y_1 & & & + & \frac{1}{4}y_4 & + & \frac{3}{4}y_6 \\ y_3 & = & \frac{1}{4} & - & \frac{1}{2}y_1 & - & y_2 & + & \frac{1}{4}y_4 & - & \frac{1}{4}y_6 \\ \hline w(y) & = & -\frac{5}{4} & - & \frac{1}{2}y_1 & - & y_2 & - & \frac{1}{4}y_4 & - & \frac{3}{4}y_6 \end{array}$$

Mivel a primál feladatunk nem volt korlátos, így a duális feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Ez fordítva is teljesül. Vagyis, ha a duális nem korlátos, akkor a primálnak nincs lehetséges megoldása.
Ezt könnyen beláthatjuk, ha egyszerűen csak felcseréljük az előbbi feladatban a primál és duál feladatok szerepét.

# 2. Sem a primálnak, sem a duálnak nincs lehetséges megoldása

**Primál feladat:**

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & -1 \\ & - & x_2 & \leq & -1 \\ \hline x_1 & + & x_2 & \to & \max. \end{array}$$

*Ha nem szeretnénk számolni:*
próbáljuk meg az $x_1, x_2 \geq 0$ feltétel kielégítése mellett egy olyan $x_1$ értéket találni, mely egyben az első egyenlőtlenséget is kielégíti. Így már ekkor látható, hogy a feladatnak nincs lehetséges megoldása.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & - & x_0 & + & x_3 & & & = & -1 \\ & - & x_2 & - & x_0 & & & + & x_4 & = & -1 \\ \hline w(x) & = & & - & x_0 & & & & & \to & \max. \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccccccccc} x_0 & = & 1 & + & x_1 & & & + & x_3 \\ x_4 & = & 0 & + & x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\ \hline w(x) & = & -1 & - & x_1 & & & - & x_3 \end{array}$$

A kétfázisú szimplex algoritmusnál tanultak alapján, ha az első fázisban a célfüggvény értéke negatív, akkor sem a segédfeladatnak, sem az eredeti feladatnak nincs lehetséges megoldása.

**Duál feladat:**

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & & & \geq & 1 \\ & - & y_2 & \geq & 1 \\ \hline -y_1 & - & y_2 & \to & \min. \end{array}$$

*Ha nem szeretnénk számolni:*
próbáljuk meg az $y_1, y_2 \geq 0$ feltétel kielégítése mellett egy olyan $y_2$ értéket találni, mely egyben a 2. egyenlőtlenséget is kielégíti. Így már ekkor látható, hogy a feladatnak nincs lehetséges megoldása.

$$\begin{array}{ccccc} -y_1 & & & \leq & -1 \\ & + & y_2 & \leq & -1 \\ \hline y_1 & + & y_2 & \to & \max. \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccccccccccc} -y_1 & & & - & y_0 & + & y_3 & & & = & -1 \\ & + & y_2 & - & y_0 & & & + & y_4 & = & -1 \\ \hline w(y) & = & & - & y_0 & & & & & \to & \max. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} y_0 & = & 1 & - & y_1 & & & + & y_3 \\ y_4 & = & 0 & - & y_1 & - & y_2 & + & y_3 \\ \hline w(y) & = & -1 & + & y_1 & & & - & y_3 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccccccccc} y_0 & = & 1 & + & y_2 & & & + & y_4 \\ y_1 & = & 0 & - & y_2 & + & y_3 & - & y_4 \\ \hline w(y) & = & -1 & - & y_2 & & & - & y_4 \end{array}$$

Az előző esethez hasonlóan a duális feladat megoldása sem lehetséges.

# 3. Összefoglalás

| | | Duál | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Nincs lehetséges mo. | Van optimuma | Nem korlátos |
| Primál | Nincs lehetséges mo. | ✓ | ✗ | ✓ |
| | Van optimuma | ✗ | ✓ | ✗ |
| | Nem korlátos | ✓ | ✗ | ✗ |