8. gyakorlat
Dualitás

Az eddigi ismereteinket fogjuk bővíteni egy felülről történő korlátozás segítségével. Így például egy gyár nem tehet végtelen profitra szert. A feladatainkat más szemszögből is vizsgálhatjuk.

1. Feladat

Van egy házi kis gyárunk, ahol gépeket szerelünk össze. Kétféle gépet tudunk csinálni, az egyik egy egyszerűbb modell, melynek összeállítása csak 1 órát vesz igénybe, a másikhoz 3 óra kell. Egy héten max. 7 órát tudunk ennek a hobbinak szentelni. A kétféle géphez nagy alkatrészekre is szükség van, ezekről egy-egy héten csak 5 db-ot tudunk elraktározni, hiszen nagy helyet fognak. Az egyes gépet 2, a kettes gépet 1 profittal tudjuk eladni. Célunk, hogy egy héten napi 1 óra munkával minél nagyobb legyen a profit.

Írjuk fel a feladat modelljét:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 7 \\ \hline 2x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \text{max.} \end{array}$$

Oldjuk meg a feladatot a már ismert módszerrel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 5 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 7 & - & x_1 & - & 3x_2 \\ \hline z(x) & = & 0 & + & \underline{2x_1} & + & x_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 5 & - & x_2 & - & x_3 \\ x_4 & = & 2 & + & 2x_2 & + & x_3 \\ \hline z(x) & = & 10 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array} \quad \textbf{Primál feladat}$$

Optimális megoldás:

- $x_1 = 5 \rightarrow$ vagyis 5-öt gyártunk az egyes gépből
- $x_2 = 0 \rightarrow$ vagyis 0-t gyártunk a kettes gépből
- és így 10 sütit kapunk

A továbbiakban más aspektussal egészítjük ki a feladatot. Egyrészt megnézzük matematika, másrészt gazdasági szemszögből:

"Matematikai" bővítés: Vezessünk be felső korlátot $\rightarrow$ Duál feladatpár felírása:

Először próbálkozzunk magunk új korlátok felírásával:
Adjuk össze az eddigi feltételeinket: $2x_1 + 4x_2 \leq 12$
$\rightarrow$ erről az új feltételről tudjuk, hogy felülről korlátozza a célfüggvényünket.
Tehát például:
I. + II. egyenlet: $2x_1 + x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 12$
2-szer az I. egyenlet: $2x_1 + x_2 \leq 2x_1 + 2x_2 \leq 10$

Most a feltételeinket vegyük valamilyen y_1 és y_2 "súllyal", melyekből majd a duális feladat változóit kapjuk meg. Ezt így írhatjuk le:

$2x_1+x_2 \leq y_1(x_1+x_2)+y_2(x_1+3x_2)$
Majd emeljük ki az x-eket. Így az y-os tagokból megkapjuk az új feladat korlátait. Melyekre majd annak kell teljesülnie, hogy ezek legyenek $\geq$-k, mint a célfüggvény együtthatói:
$y_1(x_1+x_2)+y_2(x_1+3x_2)=x_1(y_1+y_2)+x_2(y_1+3y_2)$
És végezetül. Állítsuk elő az új célfüggvényünket:

- I. feltétel: $x_1+x_2 \leq 5$
- II. feltétel: $x_1+3x_2 \leq 7$
- Helyettesítsünk be az elsőként felírt egyenlőtlenségbe:
  $y_1(x_1+x_2)+y_2(x_1+3x_2) \leq 5y_1+7y_2$

Összesítve:
$2x_1+x_2 \leq y_1(x_1+x_2)+y_2(x_1+3x_2)=x_1(y_1+y_2)+x_2(y_1+3y_2) \leq 5y_1+7y_2$

Duális feladat:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\ y_1 & + & 3y_2 & \geq & 1 \\ \hline 5y_1 & + & 7y_2 & \rightarrow & \text{min.} \end{array}$$

Vegyük észre, hogy a primál feladat mátrixaiban egy transzponálás történt a duális felírásakor. Vagyis ami a primálban egy sorban szerepelt, azt a duális felírásakor oszlopként szerepeltetjük. Másképpen: ha a duális feladatot írjuk fel, akkor a primál feladatot oszloponként kell átírnunk.

Gazdasági megközelítés: Vegyük úja elő a kiindulási feladatot, a házi kis gyárunkat. Most az alap gondolatot abból indítjuk ki, hogy ezt az egész kis házi termelést szeretnénk nagy piacra is vinni, ezért "piackutatást" végzünk, hogy néhány kérdésre választ kapjunk:

- Hogyan tudjuk minimalizálni a gyártás során felmerülő költségeinket?
- Mi az a maximális ár, amit a termékeinkre megszabhatunk, mellyel még tudunk érvényesülni a piacon?

Az első kérdésre adott válasz határozza meg a célfüggvényt. Amivel most játszunk, azok az erőforrások, mint az alkatrész(y_1) és az idő(y_2), ezek mind pénzbe kerülnek nekünk, és ezt a lehető legkisebb értéken akarjuk tartani, így kapunk egy minimalizálási célfüggvényt ($5y_1+7y_2 \rightarrow min.$)
A második kérdésre a feltételekkel tudunk válaszolni. A piac helyzete miatt elvárt, hogy a befektetett munkák több legyen, mint az eladási ár, különben maguk a vásárlók is megvehetnék és összerakhatnák a termékeket, hiszen mi nem kínálunk nekik többet. Ezzel a gondolattal már fel tudjuk írni a matematikai módszernél is levezetett feltételeket, amivel ugyanúgy megkapjuk a duális feladatot.

A kétfázisú szimplex használatával oldjuk meg a duális feladatot:

$$
\begin{array}{rcrcr}
-y_1 & - & y_2 & \leq & -2 \\
-y_1 & - & 3y_2 & \leq & -1 \\
\hline
-5y_1 & - & 7y_2 & \to & \max.
\end{array}
\quad \to \quad
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
-y_1 & - & y_2 & - & y_0 & + & y_3 & & & = & -2 \\
-y_1 & - & 3y_2 & - & y_0 & & & + & y_4 & = & -1 \\
\hline
\mathrm{w(y)} & = & & - & y_0 & & & & & \to & \max.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
y_0 & = & 2 & - & y_1 & - & y_2 & + & y_3 \\
y_4 & = & 1 & & & + & 2y_2 & + & y_3 \\
\hline
w(y) & = & -2 & + & \underline{y_1} & + & y_2 & - & y_3
\end{array}
\quad \to \quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
y_1 & = & 2 & - & y_2 & + & y_3 & - & y_0 \\
y_4 & = & 1 & + & 2y_2 & + & y_3 & & \\
\hline
w(y) & = & & & & & & - & y_0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
y_1 & = & 2 & - & y_2 & + & y_3 \\
y_4 & = & 1 & + & 2y_2 & + & y_3 \\
\hline
z(y) & = & 0 & - & 5y_1 & - & 7y_2 \\
z(y) & = & -10 & - & 2y_2 & - & 5y_3
\end{array}
$$

Optimum: +10 lesz, mert az eredeti feladatunk minimalizálás volt, és erre vissza kell térnünk, vagyis az így kapott optimum értékét -1-gyel szoroznunk kell.

Optimális megoldás: A primál feladat természetes változóinak a duális feladat mesterséges változói feleltethetőek meg. Így a primál feladat optimuma a duális feladat célfüggvény együtthatóival lesz egyenlő:

- duális célfüggvény az optimumban: $z(y) = 10 + 2y_2 + 5y_3$ (miután visszaírtuk minimalizálásra)
- x_1-nek y_3 felel meg $\to$ 5
- x_2-nek y_4 felel meg $\to$ 0, mert nem szerepel a célfüggvényben
- ami pont a primálban kapott megoldásunk

Gyenge dualitás tétele: A duális feladat bármely lehetséges megoldása felső korlátot ad a primál bármely lehetséges megoldására (azaz az optimumra is).

Erős dualitás tétele: A primál és duál feladat optimuma egyenlő.