

3. gyakorlat

Nem korlátosság, degeneráció

A mai órán olyan problémákat nézünk meg, melyek által nem jutunk optimális megoldáshoz. Ilyen lehet a nem korlátosság, amikor nem kapunk megoldást. Valamint a degeneráció, ami ciklizációhoz vezet.

Szimplex algoritmus még egyszer:

1. Minden együttható negatív a célfüggvényben?
IGEN: return optimum
2. Válasszunk egy **tetszőleges** pozitív együtthatójú célfüggvény változót!
3. Választott változó "fölött" van-e negatív együtthatójú változó?
NINCS: return nem korlátos
4. A hányadosszabály használatával határozzuk meg a negatív változókra vonatkozó korlátokat, majd válasszuk **valamelyik** legszűkebb korlátot adó egyenletet!
5. Hajtsuk végre a pivot lépést! → új szótár
goto: 1. lépés

A pirossal szedett pontokon múlt órán már konkrét szabályokat vezettünk, melyet **klasszikus generálóelem választásnak** nevezünk, és az alábbiakra kell figyelni:

- **Oszlop választás** (2. lépés): A legpozitívabb együtthatójú változók közül egyezőség esetén a legkisebb indexűt választjuk.
- **Sor választás** (4. lépés): A legszűkebb korlátot adó sorok közül egyezőség esetén a legkisebb SORindexűt választjuk.

Nézzük meg milyen problémákat okozhat a klasszikus generálóelem választás!

1. Nem korlátos feladat

Írjuk fel a szótár alakot!

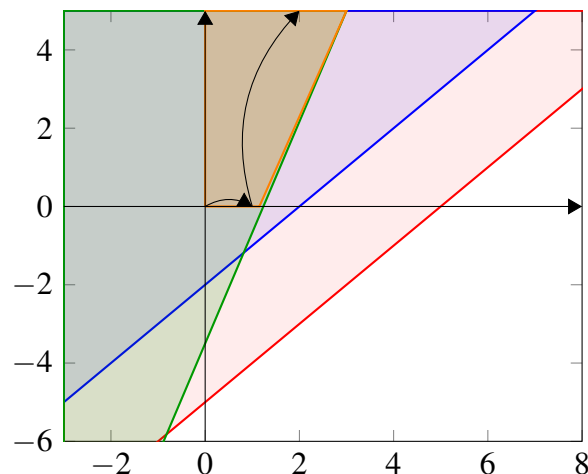
$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & 5 \\
 2x_1 - x_2 - 2x_3 & \leq & 4 \\
 3x_1 & - & x_3 \leq 3 \\
 \hline
 2x_1 + x_2 + x_3 & \rightarrow & \max
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{rcl}
 x_4 = 5 - x_1 - 2x_2 + x_3 \\
 x_5 = 4 - 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\
 x_6 = 3 - 3x_1 & + & x_3 \\
 \hline
 z(x) = 0 + \underline{2x_1} + x_2 + x_3
 \end{array}$$

1. iteráció:

- A célfüggvényben x_1 a legpozitívabb.
- A 3. sor a legkorlátozóbb egyenlet ($x_4 = 5 > x_5 = 2 > x_6 = 1$).

$$\begin{array}{rcl}
 x_4 & = & 4 - 2x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \\
 x_5 & = & 2 + x_2 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 \\
 x_1 & = & 1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\
 \hline
 z(x) & = & 2 + x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_6
 \end{array}$$

Grafikusan ($x_2 = 0$ -ra nézve):



Mind a 2. szótárban, mind az ábrán látható, hogy nem korlátos a feladat. Ezt onnan tudjuk, hogy **van olyan pozitívabb célfüggvény együttható, x_3 , amihez nincs negatív korlátozó feltétel**, vagyis nincs korlátozás.

Hasonlóan az ábrán a második lépés végtelen messzire elmehet, nincs két egymást keresztező, felső határt megszabó egyenes.

A nem korlátosság a könnyebbik eset, ezt a szótár alakban a szabályaink kiszűrik. Viszont a következő eset már nehezebb.

2. Degenerált iterációs lépés

Az algoritmus nem biztos, hogy véges számú lépésben megáll:

- **Degenerált iterációs lépés:** Olyan szimplex iteráció, amelyben nem változik a bázismegoldás.
- **Degenerált bázismegoldás:** Olyan bázismegoldás, amelyben egy vagy több bázisváltozó értéke 0.
- **Ciklizáció:** Ha a szimplex algoritmus valamely iterációja végén **egy korábbi iteráció szótárát kapjuk meg újra**.
- **Tétel:** Ha a szimplex algoritmus nem áll meg, akkor ciklizál.

$$\begin{array}{rcl}
 x_5 & = & 0 - x_1 - 2x_2 - 2x_4 \\
 x_6 & = & 6 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\
 x_7 & = & 6 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\
 \hline
 z(x) & = & 0 + 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4
 \end{array}$$

1. iteráció:

- A célfüggvényben x_2 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- Az 1. sor a legkorlátozóbb egyenlet ($x_5 = 0 < x_6 = 3 = x_7 = 3$).

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_2 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & & - & x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
 x_6 & = & 6 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 \\
 x_7 & = & 6 & + & x_1 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 \\
 \hline
 z(x) & = & 0 & + & x_1 & + & 4x_3 & & & - & 2x_5
 \end{array}$$

Figyeljük meg! Az első 2 szótárban **nem változik a bázismegoldás** (x_6 és x_7 változatlanul 6, minden más 0), és az **optimális megoldás** (0) sem. Ezt a változatlanságot nevezzük **degenerációnak**.

2. iteráció:

- A célfüggvényben x_3 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- A 2. sor a legkorlátozóbb egyenlet és legkisebb indexű sor (x_2 nem korlátoz, $x_6 = 6 = x_7 = 6$).

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_2 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 & & \\
 x_3 & = & 6 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & - & x_6 \\
 x_7 & = & 0 & + & x_1 & - & x_4 & & & + & x_6 \\
 \hline
 z(x) & = & 24 & + & x_1 & + & 8x_4 & + & 2x_5 & - & 4x_6
 \end{array}$$

3. iteráció:

- Célfüggvényben x_4 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- Az 1. sor a legkorlátozóbb egyenlet és legkisebb indexű sor ($x_2 = 0 = x_7 = 0$).

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_4 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & - & \frac{1}{2}x_5 & & \\
 x_3 & = & 6 & - & x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_6 \\
 x_7 & = & 0 & + & \frac{3}{2}x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{2}x_5 & + & x_6 \\
 \hline
 z(x) & = & 24 & - & 3x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_5 & - & 4x_6
 \end{array}$$

Ismét! Az előző két szótárban **nem változik a bázismegoldás** ($x_3 = 6$ és minden más 0), és az **optimális megoldás** (24) sem, vagyis **degeneráció** áll fenn.

3. 2in1 példa

Adott egy standard alakú feladat, írjuk föl rá a szótárat és válasszunk generálóelemet!

$$\begin{array}{rcll}
 -x_1 + x_2 & \leq & 2 & \\
 -\frac{1}{2}x_1 + x_2 & \leq & 4 & \\
 -x_1 + 4x_2 & \leq & 20 & \\
 \hline
 x_1 + 2x_2 & \rightarrow & \max & \\
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{rcll}
 x_3 & = & 2 + x_1 - x_2 & \\
 x_4 & = & 4 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \\
 x_5 & = & 20 + x_1 - 4x_2 & \\
 \hline
 z(x) & = & 0 + x_1 + \underline{2x_2} &
 \end{array}$$

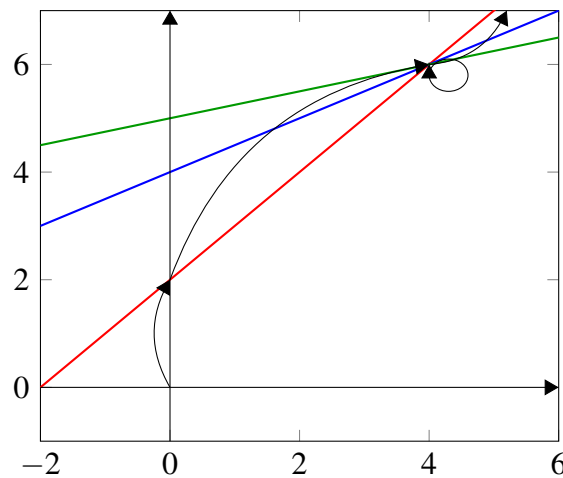
2. iteráció → 3. iteráció

$$\begin{array}{rcll}
 x_2 & = & 2 + x_1 - x_3 & \\
 x_4 & = & 2 - \frac{1}{2}x_1 + x_3 & \\
 x_5 & = & 12 - 3x_1 + 4x_3 & \\
 \hline
 z(x) & = & 4 + \underline{3x_1} - 2x_3 &
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{rcll}
 x_2 & = & 6 + x_3 - 2x_4 & \\
 x_1 & = & 4 + 2x_3 - 2x_4 & \\
 x_5 & = & 0 - \underline{2x_3} + 6x_4 & \\
 \hline
 z(x) & = & 16 + \underline{4x_3} - 6x_4 &
 \end{array}$$

4. iteráció

$$\begin{array}{rcll}
 x_2 & = & 6 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 & \\
 x_1 & = & 4 + 4x_4 - x_5 & \\
 x_3 & = & 0 + 3x_4 - \frac{1}{2}x_5 & \\
 \hline
 z(x) & = & 16 + 6x_4 - 2x_5 &
 \end{array}$$

Grafikusan:



Ezen problémák megoldására a pivot szabályok kínálnak majd megoldást (következő óra).