2. gyakorlat

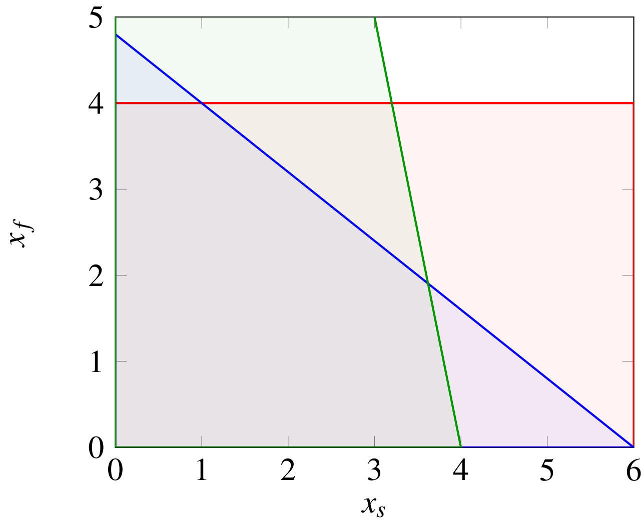
A szimplex algoritmus

Az előző órán bevezetett feladat optimális megoldását fogjuk megvizsgálni. Ehhez új fogalmakat, és egy algoritmust tanulunk meg. Hogy az algoritmust alkalmazni tudjuk, a feladatunkat mindig a megfelelő alakra kell hozni.

Az előző órán felírt feladat modellje:

$$\begin{array}{lrl} \text{I.} & 8x_s + 10x_f \leq & 48 \\ \text{II.} & 5x_s + 1x_f \leq & 20 \\ \text{III.} & 0x_s + 2x_f \leq & 8 \\ & x_s, x_f \geq & 0 \\ & 100x_s + 100x_f & \rightarrow max \end{array}$$

És grafikusan:



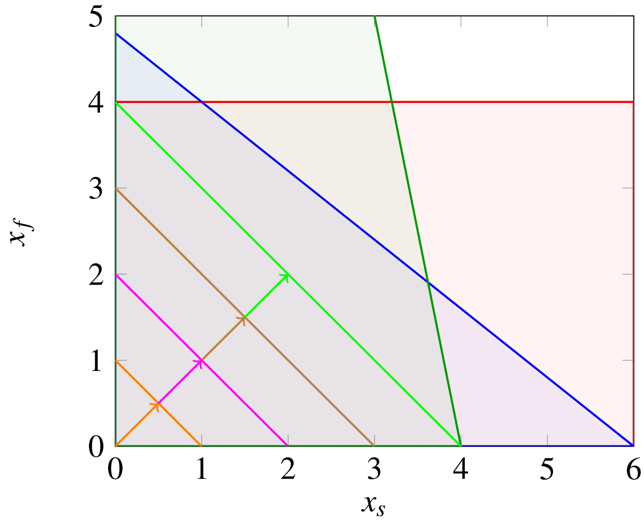
Mint azt már kimondtuk, a lehetséges megoldások halmaza az a terület, melyet a tengelyek és a 3 egyenlet együttesen határol körbe, mint a kerítés. Azt is tudjuk, hogy az optimális megoldást az oldalak mentén, vagy egy csúcspontban fogjuk megtalálni.

1. Próbálkozás

Eddig az ábránkon csak a feltétel egyenlőtlenségeket jelenítettük meg, használjuk a célfüggvényt is. Nem tudjuk, hogy az ő egyenese hol kell pontosan elhelyezkedjen, így kezdjük a keresést a (0,0) pontból, ahova fölvehetjük az célfüggvény egyenest, annak meredekségének ismeretében. Fejezzük ki mondjuk az x_f változót, így látni, fogjuk, hogy x_s növelésével mennyit nő/csökken x_f értéke $\rightarrow$ $x_f = \frac{-100}{100} x_s$. Vagyis a meredekség: $m = \frac{-1}{1}$ (x_s egységnyi növelésével x_f egy egységnyivel csökken). Ábrázoljuk az origóban.

Ha mondjuk az egész számok halmazán ($\mathbb{Z}$) vizsgálódunk, akkor növelhetjük egyesével a változóink értékét a 0-ból indulva. Ezt addig folytatva, míg valamelyik kerítésünk megállít.

Fontos észrevenni, hogy az egyeneseink egymással párhuzamosak, valamint folyamatos javulást hoznak.



Ellenőrzésképpen helyettesítsünk vissza a feltételeinkbe:

pl.	$x_s = 2$ és $x_f = 2$ esetén:			pl.	$x_s = 3$ és $x_f = 3$ esetén:		
I.	$8*2+10*2=36$	$\leq$	48	I.	$8*3+10*3=54$	$\not\leq$	48
II.	$5*2+1*2=12$	$\leq$	20	II.	$5*3+1*3=18$	$\leq$	20
III.	$0*2+2*2=4$	$\leq$	8	III.	$0*3+2*3=6$	$\leq$	8

Már $x_s = 3$ és $x_f = 3$ esetén látható, hogy a kenyérkészletünket elhasználjuk, pedig még sonkát, és salátát is használhatnánk fel, ennek eredményeképpen a csúcspontig/oldalig sem jutunk el. Vagyis jobb megoldás után nézünk a legjobb csúcspont megtalálására.
Ugyanis tétel mondja ki, hogy:
Ha egy LP feladatnak van optimális megoldása, akkora van olyan optimális megoldása, ami a lehetséges megoldásai tartományának csúcspontja.

2. Szimplex algoritmus

(Definíciók szabályszerű kimondása a külön pdf-ben található.)
Az algoritmus az úgynevezett szótár alakú feladattal dolgozik. Először megnézzük hogyan hozhatjuk a feladatunkat erre az alakra, majd futtatjuk az algoritmust az eddigi példánkon.

2.1. Standard alak

Minden programozási feladathoz megadható egy vele ekvivalens standard alakú feladat.

- $\leq$ Minden feltétel $\leq$. Áttéréskor -1-gyel szorzunk.
  pl. $2x_1 \geq -5 \;\rightarrow\; -2x_1 \leq 5$
- *A cél maximalizálás:* A célfüggvényünk maximalizálás legyen, ha nem az, akkor az előzőhöz hasonlóan áttérünk.

$$
\begin{array}{rrl}
 & 8x_1+10x_2 \leq & 48 \\
 & 5x_1+1x_2 \leq & 20 \\
 & 2x_2 \leq & 8 \\
\hline
\text{z(x)=} & 100x_1+100x_2 & \rightarrow max
\end{array}
$$

2.2. Egyenlőségek

Új, nemnegatív változókat veszünk fel. Ezekkel az egyenlőtlenségeket megszüntetjük, de az eredetivel még mindig ekvivalens feladatot kapunk.

$$
\begin{array}{rrcrcccccccl}
 & 8x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & & & & & = & 48 \\
 & 5x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 20 \\
 & & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 8 \\
\hline
\text{z(x)=} & 100x_1 & + & 100x_2 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Természetes/Döntési változók: Standard alakú feladatban is szereplő változók.
Mesterséges/Slack változók: Újonnan felvett változók.

2.3. Szótár alak

Fejezzük ki az újonnan felvett változóinkat.

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_3 & = & 48 & - & 8x_1 & - & 10x_2 \\
x_4 & = & 20 & - & 5x_1 & - & x_2 \\
x_5 & = & 8 & & & - & 2x_2 \\
\hline
\text{z(x)} & = & 0 & + & 100x_1 & + & 100x_2
\end{array}
$$

Bázisváltozók: A szótár alakú feladat bal oldalán szereplő változók. Értékük az egyenletek jobb oldalán álló konstans.
Nembázis változók: A szótár alakú feladat jobb oldalán álló változók. Értékük 0!

2.4. Az algoritmus

Input: A szótár alakú feladat.
Pivot lépések: Amíg van pozitív együtthatójú célfüggvény változónk.

1. **Válasszunk generáló elemet.**
   - Oszlop választás: Pozitív célfüggvény együttható, azok közül a legnagyobb (legpozitívabb) (ha több azonos is van, akkor azok közül a kisebb indexű)
   - Sor választás: Hányados szabály alapján:
     - Van negatív együtthatójú változónk? $\rightarrow$ ha igen, vége az algoritmusnak
     - Legkorlátozóbb változó: A jobb oldali konstans és az aktuális oszlopban szereplő változó hányadosaként kapott legkisebb érték a belépő változónk.
2. **Fejezzük ki a belépő változónkat**, majd minden előfordulását helyettesítsük be.

Output: Megoldás (nincs megoldás / nem korlátos a feladat / az optimum értéke).
(A zölddel szedett szavak az algoritmus kulcsszavai, ezeket mint vezérfonal érdemes tudni.)

Most nézzük meg az eddigi példánkon:
(Hogy a számolást egyszerűbb legyen követni, a célfüggvényben a 100-as szorzót kiemeltem, majd elhagytam. Így az eredetivel egy ekvivalens feladatot oldok meg, és ha a pontos eredményt szeretném megkapni, csak ezzel a konstanssal kell visszaszorozzam a végeredményt.)

1. iteráció

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 48 & - & 8x_1 & - & 10x_2 \\ x_4 & = & 20 & - & \underline{5x_1} & - & x_2 \\ x_5 & = & 8 & & & - & 2x_2 \\ \hline \text{z(x)} & = & 0 & + & \underline{100x_1} & + & 100x_2 \end{array}$$

- **Oszlop választás:** A célfüggvényben x_1 és x_2 együtthatója is pozitív. Ráadásul egyenlőek, így a kisebb indexűt, x_1-et választjuk.
- **Sorválasztás:**
  - A 3. sor nem korlátoz, így azt nem vizsgáljuk.
  - Az 2. sor hányadosa: $\frac{20}{5} = 4$ Az itt kapott érték lesz a növekményünk.
  - A 1. sor hányadosa: $\frac{48}{8} = 6$

  Így a 2. sort választjuk.

Fejezzük ki x_1-et és helyettesítsünk be minden előfordulásába.

2. iteráció

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_3 & = & 16 & - & \underline{\frac{42}{5}x_2} & + & \frac{8}{5}x_4 & (x_3 = 48 - 8(4 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4) - 10x_2) \\ x_1 & = & 4 & - & \frac{1}{5}x_2 & - & \frac{1}{5}x_4 & \\ x_5 & = & 8 & - & 2x_2 & & & \\ \hline \text{z(x)} & = & 4 & + & \underline{\frac{4}{5}x_2} & - & \frac{1}{5}x_4 & (z(x) = 0 + 4 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + x_2) \end{array}$$

- **Oszlop választás:** A célfüggvényben csak x_2 együtthatója pozitív.
- **Sorválasztás:**
  - Az 1. sor hányadosa: $\frac{16}{42/5} \approx 2$
  - A 2. sor hányadosa: $\frac{4}{1/5} = 20$
  - A 3. sor hányadosa: $\frac{8}{2} = 4$

  Így az 1. sort választjuk.

Fejezzük ki x_2-t és helyettesítsünk be minden előfordulásába.

Az optimális megoldás szótára

$$x_2 = \frac{40}{21} - \frac{5}{42}x_3 + \frac{4}{21}x_4$$

$$x_1 = \frac{152}{42} + \frac{1}{42}x_3 - \frac{25}{105}x_4 \qquad (x_1 = 4 - \frac{1}{5}(\frac{80}{42} - \frac{5}{42}x_3 + \frac{4}{21}x_4) - \frac{1}{5}x_4)$$

$$x_5 = \frac{88}{21} + \frac{5}{21}x_3 - \frac{8}{21}x_4 \qquad (x_5 = 8 - 2(\frac{80}{42} - \frac{5}{42}x_3 + \frac{4}{21}x_4))$$

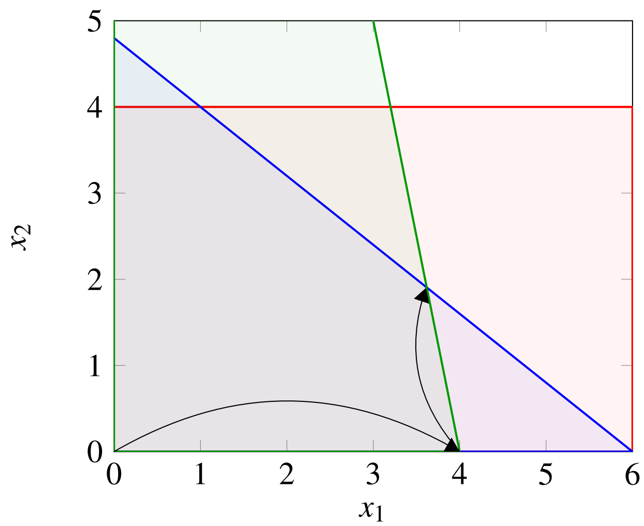
$$z(x) = \frac{116}{21} - \frac{4}{42}x_3 - \frac{5}{105}x_4 \qquad (z(x) = 4 + \frac{4}{5}(\frac{80}{42} - \frac{5}{42}x_3 + \frac{4}{21}x_4) - \frac{1}{5}x_4)$$

Az optimum: $\frac{116}{21} \approx 5{,}52$
(Ha visszaszorzunk a feladat elején elhagyott konstanssal, akkor egy reális értéket kapunk, mint bevétel, azaz ∼552 Ft.)
A döntési változók értékei:

$$x_1 = \frac{152}{42} \approx 3{,}61$$

$$x_2 = \frac{40}{21} \approx 1{,}9$$

Végül nézzük meg, hogy hogyan "lépkedett" az algoritmus:



Jól látható, hogy az algoritmus csúcspontról csúcspontra lép, míg el nem jut az optimális megoldásba.
Hogy jó irányba induljunk el, és ne lépkedjünk visszafele később különféle generálóelem választásokkal garantálhatjuk.