

10. gyakorlat Komplementaritás tétel

Komplementáris jelentése 'kiegészít', vagyis mi a dualitásról való ismereteinket egészítjük ki, így csökkentjük a szükséges számolás mennyiségét.

1. Tételek

Tétel 1:

$x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ lehetséges megoldás és $y^* = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*]$ lehetséges megoldás, akkor és csak akkor optimális, ha:

(*) $\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i^* = c_j$ és/vagy $x_j^* = 0$ igaz, $j = 1, \dots, m$
ha $x_j > 0$, akkor y -t a duális feladat j -edik egyenletébe helyettesítve teljesül az egyenlőség

(**) $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j^* = b_i$ és/vagy $y_i^* = 0$ igaz, $i = 1, \dots, n$
ha $y_i > 0$, akkor x -et az i -edik egyenletbe helyettesítve "="-et kapunk (a feltétel éles)

(Komplementaritás lazaság - 1. pötty)

Kiegészítések:

- Logikai formulaként felírva: $A \cup B = \neg A \rightarrow B$ vagy $\neg B \rightarrow A$
 (például: az esti buliban lesz sör vagy pálinka, ha 10 előtt érkezünk, az azt is jelenti, hogy ha nem lesz sör, akkor azért pálinka biztosan lesz, és fordítva)
- Primál természetes változói és a duál mesterséges változói között teremt kapcsolatot, és fordítva.

Tétel 2:

$x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ lehetséges megoldás $\Leftrightarrow$ optimális megoldás, ha $\exists y$ lehetséges megoldás, amelyre (*) és (**) igaz.

(Komplementaritás lazaság - 3. pötty)

Kiegészítés: Egy primál feladat optimalitása akkor is ellenőrizhető, ha nem ismerünk egyetlen duál optimumot sem.

2. 1. feladat

Primál feladat:

Vegyünk egy korábbi órai példát:

Primál feladat:		Duál feladat:
$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 7 \\ \hline 2x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max \end{array}$	$\rightarrow$	$\begin{array}{rclcl} y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\ y_1 & + & 3y_2 & \geq & 1 \\ \hline 5y_1 & + & 7y_2 & \rightarrow & \min \end{array}$

Vegyük fel a korábbi órához hasonlóan az új korlátainkat:

$$2x_1 + x_2 \leq (y_1 + y_2)x_1 + (y_1 + 3y_2)x_2 = (x_1 + x_2)y_1 + (x_1 + 3x_2)y_2 \leq 5y_1 + 7y_2$$

Ha csak az x_1 -re vonatkozóan szeretnénk a feltételeinket úgy kielégíteni, hogy optimumot kapjunk, akkor nem elegendő a " $\leq$ "-nek fennállnia, teljes egyenlőségre van szükség, az alábbi módon:

$$2x_1 = (y_1 + y_2)x_1, \text{ akkor lehet egyenlő, ha } x_1 = 0 \text{ vagy } 2 = y_1 + y_2 \text{ teljesül.}$$

Hasonlóan x_2 esetében.

Ahhoz, hogy ezek az esetek fennálljanak az 1. tétel (*) pontját alkalmaztuk valójában. Az optimum értékét pedig egyszerű próbálgatással megkaphatjuk. Legyen például $x_2 = 0$, ekkor a tétel miatt az első egyenlőtlenségben egyenlőségnek kell lennie, vagyis ha $x_2 = 0$, akkor $x_1 = 5$, ami pont a korábbi órán kapott optimális megoldás.

3. 2. feladat

Primál feladat:						Duál feladat:					
I.	x_1	-	x_2		≤ -4	$-y_1$	-	y_2	-	y_3	≤ -1
II.	x_1			-	$x_3 \leq -4$	y_1			-	y_3	≤ -1
III.	x_1	+	x_2	+	$x_3 \leq 10$			y_2	-	y_3	≤ 0
	x_1	+	x_2		$\rightarrow \max$			$4y_1$	+	$4y_2$	- $10y_3 \rightarrow \max$

Kísérletezzünk!

Próbálgassunk primál optimális megoldásokat, anélkül, hogy végigszámolnánk a duálist.

A 2. tétel kiegészítése alapján ez elegendő, hogy a primál megoldásokról eldöntsük valóban optimálisak-e.

Például: $x = (0, 4, 4)$, azaz az x optimális megoldás rendre: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ és $x_3 = 4$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{I.} & "=" \quad -y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \quad y_3 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \\
 \text{II.} & "=" \Rightarrow -y_1 - y_3 = -1 \\
 \text{III.} & "<" \quad y_2 - y_3 = 0 \\
 & y = (-1, 0, 0) \quad \text{X}
 \end{array}$$

Használjuk fel az imént megismert tételeinket:

- Először is számoljuk ki az optimumok alapján, hogy a primál feladat feltételeiben fenn áll-e az egyenlőség, vagy sem, ezeket jegyezzük fel.
- Az 1. tétel (**) pontja alapján meg tudjuk határozni, hogy az egyes y_i -kre teljesül-e az, hogy egyenlők 0-val. Vagyis y_i akkor lesz nulla, ha a primál feladat i -edik sorában nincs egyenlőség (amiket az előző lépésben kiszámoltunk).
- Az 1. tétel (*) pontja alapján eldönthető, hogy a duális feladatban egyenlőségek szerepelnek-e. Vagyis, ahol a primál optimális megoldásunkban nem 0 szerepel, ott biztosan egyenlőség van a duális feladatban. A többit később tudjuk majd csak eldönteni.

- Utolsó lépésként számoljuk ki az y lehetséges megoldását:
 - y_3 -ról már tudjuk, hogy 0.
 - Mivel y_3 -ról már tudjuk, hogy 0, így a III. egyenlet alapján y_2 is meghatározható.
 - A II. feltételből szintén y_3 ismerete alapján ki tudjuk számolni y_1 -et. Ez viszont ellentmondáshoz vezet, mert a lehetséges megoldásnak nemnegatívnak kell lennie!

Nézzünk még meg néhány lehetséges primál optimális megoldást hasonló módon:

Például: $x = (0, 5, 5)$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{I.} & "<" & -y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \quad y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 \geq 0 \\
 \text{II.} & "<" & \Rightarrow \quad -y_1 - y_3 = -1 \\
 \text{III.} & "=" & y_2 - y_3 = 0 \\
 & & y = (0, 0, 0/1) \quad \times
 \end{array}$$

Ellentmondásba futottunk, mert y_3 -nak egyidejűleg kéne 0-nak és 1-nek is lennie.

Például: $x = (\frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3})$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{I.} & "=" & -y_1 - y_2 - y_3 = -1 \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \\
 \text{II.} & "=" & \Rightarrow \quad -y_1 - y_3 = -1 \\
 \text{III.} & "=" & y_2 - y_3 = 0 \\
 & & y = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \quad \times
 \end{array}$$

Az első esethez hasonlóan negatív szám került a lehetséges megoldások halmazába, így ellentmondáshoz jutottunk.

Például: $x = (0, 6, 4)$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{I.} & "<" & -y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \quad y_1 = 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \\
 \text{II.} & "=" & \Rightarrow \quad -y_1 - y_3 = -1 \\
 \text{III.} & "=" & y_2 - y_3 = 0 \\
 & & y = (0, 1, 1) \quad \checkmark
 \end{array}$$

Leellenőriztük a primál feladat optimalitását a duál optimumok ismerete nélkül.