

9. gyakorlat Dualitás lehetséges esetei

1. A primál nem korlátos, a duálnak nincs lehetséges megoldása

Primál feladat:

$$\begin{array}{rcll}
 x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & 5 & \\
 2x_1 - x_2 - 2x_3 & \leq & 4 & \\
 3x_1 & - & x_3 & \leq 3 \\
 \hline
 2x_1 + x_2 + x_3 & \rightarrow & \max. &
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{rcll}
 x_4 = 5 & - & x_1 & - 2x_2 + x_3 \\
 x_5 = 4 & - & 2x_1 & + x_2 + 2x_3 \\
 x_6 = 3 & - & 3x_1 & + x_3 \\
 \hline
 z(x) = 0 & + & 2x_1 & + x_2 + x_3
 \end{array}$$

A primál feladat **nem korlátos**, mert van olyan pozitív célfüggvény együttható, melyhez csak pozitív feltételek tartoznak.

Duál feladat:

Vegyük fel a duál feladatpárt:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq y_1(x_1 + 2x_2 - x_3) + y_2(2x_1 - x_2 - 2x_3) + y_3(3x_1 - x_3) \leq 5y_1 + 4y_2 + 3y_3$$

$$\begin{array}{rcll}
 y_1 + 2y_2 + 3y_3 & \geq & 2 & \\
 2y_1 - y_2 & & \geq & 1 \\
 -y_1 - 2y_2 - y_3 & \geq & 1 & \\
 \hline
 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 & \rightarrow & \min. &
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{rcll}
 -y_1 - 2y_2 - 3y_3 & \leq & -2 & \\
 -2y_1 + y_2 & & \leq & -1 \\
 y_1 + 2y_2 + y_3 & \leq & -1 & \\
 \hline
 -5y_1 - 4y_2 - 3y_3 & \rightarrow & \max. &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 -y_1 - 2y_2 - 3y_3 - y_0 + y_4 & & & = -2 \\
 -2y_1 + y_2 & & - y_0 & + y_5 = -1 \\
 y_1 + 2y_2 + y_3 - y_0 & & & + y_6 = -1 \\
 \hline
 w(y) = & & - y_0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 y_0 & = & 2 & - y_1 - 2y_2 - 3y_3 + y_4 \\
 y_5 & = & 1 & + y_1 - 3y_2 - 3y_3 + y_4 \\
 y_6 & = & 1 & - 2y_1 - 4y_2 - 4y_3 + y_4 \\
 \hline
 w(y) & = & -2 & + y_1 + 2y_2 + 3y_3 - y_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 y_0 & = & \frac{5}{4} & + \frac{1}{2}y_1 + y_2 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{3}{4}y_6 \\
 y_5 & = & \frac{1}{4} & + \frac{5}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_4 + \frac{3}{4}y_6 \\
 y_3 & = & \frac{1}{4} & - \frac{1}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{4}y_4 - \frac{1}{4}y_6 \\
 \hline
 w(y) & = & -\frac{5}{4} & - \frac{1}{2}y_1 - y_2 - \frac{1}{4}y_4 - \frac{3}{4}y_6
 \end{array}$$

Mivel a **primál feladatunk nem volt korlátos**, így a **duális feladatnak nincs lehetséges megoldása**.

Ez fordítva is teljesül. Vagyis, ha a duális nem korlátos, akkor a primálnak nincs lehetséges megoldása.

Ezt könnyen beláthatjuk, ha egyszerűen csak felcseréljük az előbbi feladatban a primál és duál feladatok szerepét.

2. Sem a primálnak, sem a duálnak nincs lehetséges megoldása

Primál feladat:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & & \leq -1 \\
 -x_2 & & \leq -1 \\
 \hline
 x_1 + x_2 & \rightarrow & \max.
 \end{array}$$

Ha nem szeretnénk számolni:
 próbáljuk meg az $x_1, x_2 \geq 0$ feltétel kielégítése mellett egy olyan x_1 értéket találni, mely egyben az első egyenlőtlenséget is kielégíti. Így már ekkor látható, hogy a feladatnak nincs lehetséges megoldása.

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & -x_0 + x_3 & = -1 \\
 -x_2 - x_0 & + x_4 & = -1 \\
 \hline
 w(x) = & -x_0 & \rightarrow \max.
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{rcl}
 x_0 & = 1 + x_1 & + x_3 \\
 x_4 & = 0 + x_1 + x_2 + x_3 \\
 \hline
 w(x) & = -1 - x_1 & - x_3
 \end{array}$$

A kétfázisú szimplex algoritmusnál tanultak alapján, ha az első fázisban a célfüggvény értéke negatív, akkor sem a segédfeladatnak, sem az eredeti feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Duál feladat:

$$\begin{array}{rcl}
 y_1 & & \geq 1 \\
 -y_2 & & \geq 1 \\
 \hline
 -y_1 - y_2 & \rightarrow & \min.
 \end{array}$$

Ha nem szeretnénk számolni:
 próbáljuk meg az $y_1, y_2 \geq 0$ feltétel kielégítése mellett egy olyan y_2 értéket találni, mely egyben a 2. egyenlőtlenséget is kielégíti. Így már ekkor látható, hogy a feladatnak nincs lehetséges megoldása.

$$\begin{array}{rcl}
 -y_1 & & \leq -1 \\
 +y_2 & & \leq -1 \\
 \hline
 y_1 + y_2 & \rightarrow & \max.
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{rcl}
 -y_1 & -y_0 + y_3 & = -1 \\
 +y_2 - y_0 & + y_4 & = -1 \\
 \hline
 w(y) = & -y_0 & \rightarrow \max.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 y_0 & = 1 - y_1 & + y_3 \\
 y_4 & = 0 - y_1 - y_2 + y_3 \\
 \hline
 w(y) & = -1 + y_1 & - y_3
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{rcl}
 y_0 & = 1 + y_2 & + y_4 \\
 y_1 & = 0 - y_2 + y_3 - y_4 \\
 \hline
 w(y) & = -1 - y_2 & - y_4
 \end{array}$$

Az előző esethez hasonlóan a duális feladat megoldása sem lehetséges.

3. Összefoglalás

		Duál		
		Nincs lehetséges mo.	Van optimuma	Nem korlátos
Primál	Nincs lehetséges mo.	✓	✗	✓
	Van optimuma	✗	✓	✗
	Nem korlátos	✓	✗	✗