

5. gyakorlat Kétfázisú szimplex algoritmus és speciális esetei

1. Emlékeztető - Standard alak, áttérés

Standard alak

- Minden feltétel \leq -et tartalmaz csak.
- A célfüggvényünket **maximalizáljuk**.
- A **b vektor** (jobb oldalon álló konstansok), minden eleme **nemnegatív**.

Átalakítások

- Ha egyenlőség van, akkor két egyenlőtlenséget veszünk fel.
pl. $x_1 + x_2 = 3 \rightarrow x_1 + x_2 \leq 3$ és $x_1 + x_2 \geq 3$
- $\geq \rightarrow \leq$: -1-gyel való szorzás.
pl. $x_1 - 3x_2 \geq -3 \rightarrow -x_1 + 3x_2 \leq 3$
- Áttérés minimalizálásról maximalizálásra: -1-gyel való szorzás, és min. \rightarrow max.
pl. $-2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min. \rightarrow 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max.$

2. Kétfázisú szimplex algoritmus

Vegyünk egy standard alakú feladatot:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & - & x_2 & \leq & -5 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ \hline 2x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max. \end{array}$$

Már a standard alakban felismerhető, hogy az eddigi feltételeinknek nem felel meg. De ha a szótár alakot is felírjuk, akkor megbizonyosodhatunk róla, hogy már a **kiindulási szótár alakban nem lehetséges** (nem fizibilis) **bázismegoldást** kapunk:

$$\begin{array}{rcll} x_3 & = & -5 & - & x_1 & + & x_2 \\ x_4 & = & 6 & - & x_1 & - & x_2 \\ \hline z(x) & = & & & 2x_1 & + & x_2 \end{array}$$

Hogy megszabaduljunk a negatív szám(ok)tól vegyünk fel egy új mesterséges változót, x_0 -t, és egy új célfüggvényt, melyre megoldjuk. Ha x_0 -t negatív előjellel vesszük fel, akkor amint kifejezzük eltűnnek a negatív konstansaink.

$$\begin{array}{rcll} x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & -5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_0 & \leq & 6 \\ \hline w(x) & = & & & - & x_0 \\ z(x) & = & 2x_1 & + & x_2 \end{array}$$

Most a szótárunkhoz felvesszük a szokásos mesterséges változókat is x_0 mellé. Majd a **legnegatívabb jobboldalú egyenlet**ből kifejezzük x_0 -t. Így garantált, hogy minden bázisváltozó értéke nemnegatív lesz, vagyis lehetséges bázismegoldást kapunk, melyből elindíthatjuk a szimplex algoritmust.

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_0 & + & x_3 & & = & -5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_0 & & & + & x_4 & = & 6 \\ \hline w(x) & = & 0 & - & x_0 & & & & & & \\ z(x) & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 & & & & \end{array}$$

Az újonnan kialakított szótárból indítjuk a kétfázisú szimplex algoritmust. 1. fázisban a $w(x)$ célfüggvényre oldjuk meg. (Azonban érdemes az eredeti célfüggvényt is végig felírni, és követni azon is a változásokat, mert később vissza fogunk hozzá térni.)

1. fázis

$$\begin{array}{rcccccc} x_0 & = & 5 & + & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ x_4 & = & 11 & & & - & 2x_2 & + & x_3 \\ \hline w(x) & = & -5 & - & x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\ z(x) & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 & & \end{array}$$

Klasszikus generálóelem választást alkalmazva az **1. iteráció**ban a $w(x)$ -re:

- A legpozitívabb együtthatójú változó a célfüggvényben x_2 .
- A legkorlátozóbb egyenlet pedig az 1.

$$\begin{array}{rcccccc} x_2 & = & 5 & + & x_1 & + & x_3 & - & x_0 \\ x_4 & = & 1 & - & 2x_1 & - & x_3 & + & 2x_0 \\ \hline w(x) & = & 0 & & & & & - & x_0 \\ z(x) & = & 5 & + & 3x_1 & + & x_3 & - & x_0 \end{array}$$

Tétel: A standard alakú feladatnak akkor és csak akkor létezik lehetséges megoldása, ha $w(x) = 0$ a hozzá felírt segédfeladat optimuma.

Mivel teljesül, hogy $w(x) = 0$ és $x_0 = 0$, így az eredeti feladatunknak is van lehetséges megoldása, a 2. fázisban $z(x)$ -el folytatjuk.

2. fázis

Állítsuk elő a szótárunkat:

- Ha $x_0 = 0$ szerepel a feltételek között, akkor elhagyjuk.
- Ha x_0 **bázisváltozó**, akkor az egyenletének jobb oldalán lévő nem 0 együtthatójú változók valamelyikét belépőváltozónak, x_0 -t kilépőváltozónak tekintve végrehajtunk egy **pivot lépést**.
- **Elhagyjuk x_0 megmaradt előfordulásait.**
- A **célfüggvényt** az **eredetire** cseréljük, amit az aktuális bázisváltozóknak megfelelően átírunk (ha az első fázis során is átírtuk $z(x)$ -et, akkor $w(x)$ -et csak töröljük).

$$\begin{array}{r} x_2 = 5 + x_1 + x_3 \\ x_4 = 1 - 2x_1 - x_3 \\ \hline z(x) = 5 + \underline{3x_1} + x_3 \end{array}$$

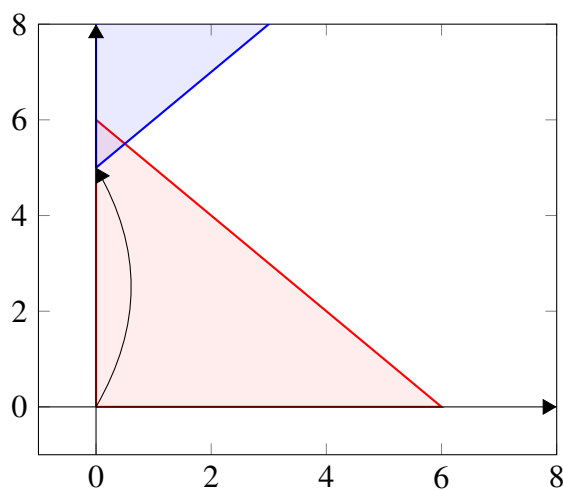
Klasszikus generálóelem választást alkalmazva az **1. iterációban** a $z(x)$ -re:

- A legpozitívabb együtthatójú változó a célfüggvényben x_1 .
- A legkorlátozóbb egyenlet pedig az 2.

$$\begin{array}{r} x_2 = \frac{11}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ \hline z(x) = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \end{array}$$

Az optimális megoldás: $\frac{13}{2}$

Grafikusan szemléltetve látható, hogy a lehetséges megoldások halmaza nem tartalmazza az origót. Azonban a korábban tanult szimplex algoritmus onnan indult, ezért nem tudta a feladatot megoldani. A kétfázisú szimplex kiküszöböli ezt a problémát, 1. fázisában "elsétál" a lehetséges megoldások halmazához, majd innen alkalmazhatjuk a korábbi algoritmust.



3. Nincs lehetséges megoldás

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & & + & x_3 & \leq & 4 \\
 x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & -5 \\
 x_1 & - & x_2 & & & \leq & -1 \\
 \hline
 x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \rightarrow & \max.
 \end{array}$$

Szabaduljunk meg a negatív jobb oldalaktól új mesterséges változókkal:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & & + & x_3 & - & x_0 & + & x_4 & & = & 4 \\
 x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_0 & & + & x_5 & = & -5 \\
 x_1 & - & x_2 & & & - & x_0 & & & + & x_6 & = & -1 \\
 \hline
 w(x) & = & & & - & x_0 & & & & & & & & \\
 z(x) & = & 0 & + & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & & & &
 \end{array}$$

-5 a legnegatívabb, így a 2. sorban fejezzük ki x_0 -t:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_4 & = & 9 & & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_5 \\
 x_0 & = & 5 & + & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_5 \\
 x_6 & = & 4 & & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_5 \\
 \hline
 w(x) & = & -5 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_5
 \end{array}$$

1. iteráció

- x_3 az egyetlen pozitív, így legpozitívabb a célfüggvényben.
- A legkorlátozóbb sor a 3. sor.

$$\begin{array}{rclcl}
 x_4 & = & 1 & & - & 3x_2 & - & x_5 & + & 2x_6 \\
 x_0 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 & & + & x_6 \\
 x_3 & = & 4 & & + & 2x_2 & + & x_5 & - & x_6 \\
 \hline
 w(x) & = & -1 & - & x_1 & + & x_2 & & - & x_6
 \end{array}$$

2. iteráció

- x_2 az egyetlen pozitív, így legpozitívabb a célfüggvényben.
- A legkorlátozóbb sor az 1. sor.

$$\begin{array}{rclcl}
 x_2 & = & \frac{1}{3} & & - & \frac{1}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{2}{3}x_6 \\
 x_0 & = & \frac{2}{3} & + & x_1 & + & \frac{1}{3}x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{1}{3}x_6 \\
 x_3 & = & \frac{14}{3} & & - & \frac{2}{3}x_4 & + & \frac{1}{3}x_5 & + & \frac{1}{3}x_6 \\
 \hline
 w(x) & = & -\frac{2}{3} & - & x_1 & - & \frac{1}{3}x_4 & - & \frac{1}{3}x_5 & - & \frac{1}{3}x_6
 \end{array}$$

Az optimum: $-\frac{2}{3}$

Mivel maximalizálunk ez nem lehetséges megoldás. Egy nemnegatív számot várnánk.

Az ábrán kék színnel jelölt eset.

4. Nem korlátos feladat

$$\frac{x_1 - x_2 \leq -1}{x_1 \rightarrow \max.}$$

$$\frac{x_1 - x_2 - x_0 + x_3 = -1}{x_1 \rightarrow \max.}$$

Fejezzük ki a legnegatívabb jobboldalt:

$$\frac{x_0 = 1 + x_1 - x_2 + x_3}{w(x) = -1 - x_1 + x_2 - x_3}$$

1. iteráció

- x_2 az egyetlen pozitív, így legpozitívabb a célfüggvényben.
- A legkorlátozóbb sor az 1. sor.

$$\frac{x_2 = 1 + x_1 + x_3 - x_0}{w(x) = -x_0}$$

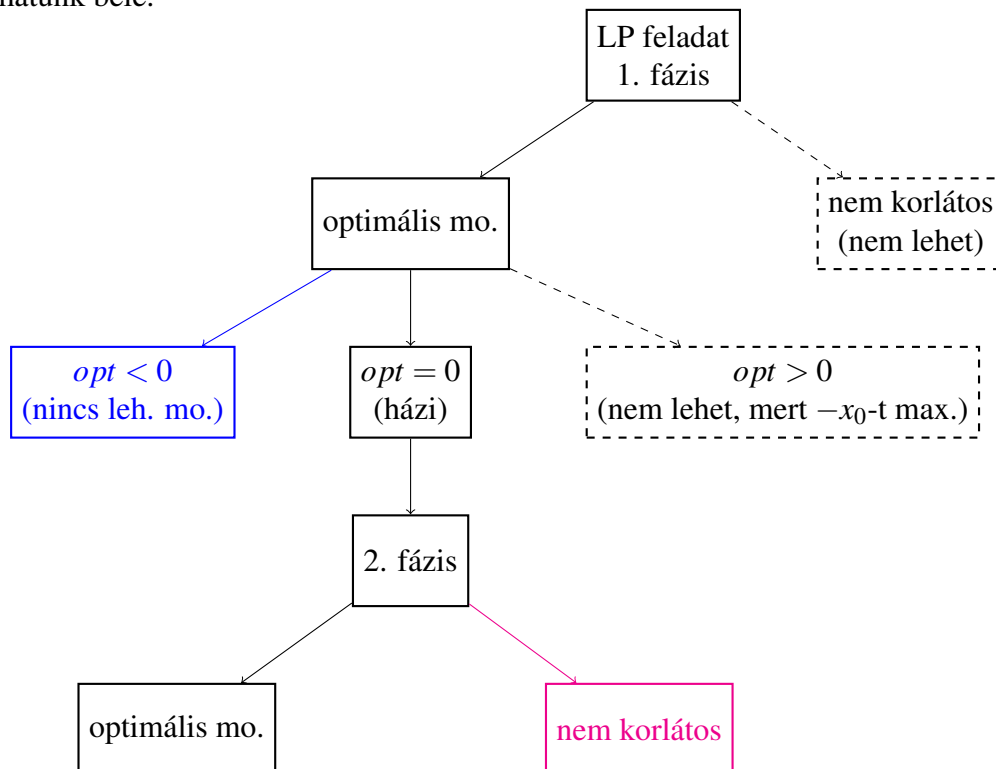
$$z(x) = x_1$$

A feladat nem korlátos, mert van olyan pozitív célfüggvény együtthatónk, melyhez csak pozitív korlátok tartoznak. Pont, mint a korábbiakban is volt róla szó.

Az ábrán rózsaszínnel jelölt eset.

5. Összefoglalás

Az alábbi ábra szemlélteti, hogy a kétfázisú szimplex algoritmus alkalmazásával milyen esetekbe futhatunk bele.



Az ábra értelmezése:

A fő ág, a közepén futó fekete a legideálisabb eset, amikor:

- Az 1. fázis (felvett segédfeladat) a $w(x) = 0$ és $x_0 = 0$ állapottal áll meg, vagyis az eredeti feladatunknak van lehetséges megoldása.
- A 2. fázisban meg is kapjuk az optimális megoldást.
- *Erre látunk példát a kedvcsinálóban, ilyen a házi, és az előző gyakorlat feladata is.*

A jobb alsó ág:

- Az előző esethez hasonlóan megkapjuk az 1. fázisban az optimumot, viszont az eredeti feladatunk mégsem korlátos.
- *A 2-es pontban látható feladat is erre ad példát.*

Bal középső ág:

- Az 1. fázis optimuma nem 0, annál kisebb. Mivel maximalizálunk (vagyis minél magasabb értéket várunk), így intuitívan is érezhető, hogy ez nem lehetséges megoldás.
- *Az 1. feladat erre példa.*

Szaggatott vonalás ágak:

- A felső eset nem lehet, mert eredetileg a segédfeladat $x_0 \rightarrow \min$. (amit megfordítottunk, hogy ismereteinknek megfelelően maximalizálással megoldjuk). Azonban a minimalizálás felső korlátja a 0, vagyis van korlátja, tehát ebbe nem futhatunk bele.
- Az előbbi pontból következik: mivel minimalizálás, így minél kisebb érték a célunk, vagyis nem jó, ha 0-nál nagyobb értéket kapunk, a 0 felső korlát.

6. Kedvcsináló feladat - Gyakorlati példa

Egy "átlagos" informatikus hallgató már túl van 2 kivételével az összes vizsgáján. Az opkut és az oprendszer maradt hátra. Az eddig teljesített kurzusok kreditjei szorozva a jeggyel 93-at tesznek ki. Ha a KKI-hez ezt 30-al leosztjuk, akkor 3,1-et kapunk. Ha nem bukik, akkor ez mindenképp csak javul. A 2 vizsga közvetlen egymás után van, egy napon. Ha leszámítjuk, hogy kipihenten megy vizsgára, ezért alszik, valamint a létszükségleteit ellátja, akkor 8,5 órája marad a 2 vizsgákra felkészülni. Célja, hogy mindkét vizsgán legalább a 2-es jegyet megszerezze. Így fél órát arra szentel, hogy a kétfázisú szimplex segítségével kioptimalizálja, hogy a két vizsgára külön-külön mennyit készüljön, és így a maximális KKI-t (ösztöndíjat) kapja majd. Amit tudunk:

opkut (x_1 óra)	oprendszer. (x_2 óra)
1 jegy - 1 óra	1 jegy - 2 óra
3 kredit	2 kredit

Írjuk fel a hozzá tartozó standard alakú feladatot:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ \frac{1}{1}x_1 & & & \geq & 2 \\ & & \frac{1}{2}x_2 & \geq & 2 \\ \hline \frac{93}{30} + \frac{3}{30}x_1 & + & \frac{1}{30}x_2 & \rightarrow & \max \end{array}$$

Vegyük fel a segédfeladatot (egy lépésben felvesszük most az összes új mesterséges változót, és az egyszerűség kedvéért a szokásos módon kifejezzük őket). Majd fejezzük ki a legnegatívabb jobboldalú egyenletből x_0 -t.

Vezessük le az **1. fázist**:

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 8 & + & x_0 & - & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & -2 & + & x_0 & + & x_1 & & \\ \hline x_5 & = & -2 & + & x_0 & & & + & \frac{1}{2}x_2 \\ w(x) & = & & - & x_0 & & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{rclcl} x_3 & = & 10 & - & 2x_1 & - & x_2 & + & x_4 \\ x_0 & = & 2 & - & x_1 & & & + & x_4 \\ \hline x_5 & = & 0 & - & x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_4 \\ w(x) & = & -2 & + & x_1 & & & - & x_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 10 & - & 2x_2 & - & x_4 & + & 2x_5 \\ x_0 & = & 2 & - & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_5 \\ \hline x_1 & = & 0 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_4 & - & x_5 \\ w(x) & = & -2 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & - & x_5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rclcl} x_3 & = & 2 & + & 4x_0 & - & x_4 & - & 2x_5 \\ x_2 & = & 4 & - & 2x_0 & & & + & 2x_5 \\ \hline x_1 & = & 2 & - & x_0 & + & x_4 & & \\ w(x) & = & 0 & - & x_0 & & & & \end{array}$$

Hagyjuk el x_0 előfordulásait, és írjuk vissza az eredeti célfüggvényt. Figyeljünk oda, hogy most x_1 és x_2 is bázisváltozók, vagyis mindkettőt ki kell fejezni.

Oldjuk meg a **2. fázist**:

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & = & 2 & - & x_4 & - & 2x_5 \\ x_2 & = & 4 & & & + & 2x_5 \\ \hline x_1 & = & 2 & + & x_4 & & \\ z(x) & = & \frac{93}{30} & + & \frac{3}{30}x_1 & + & \frac{1}{30}x_2 \\ \hline z(x) & = & \frac{93}{30} & + & \frac{3(2+x_4)}{30} & + & \frac{4+2x_5}{30} \\ z(x) & = & \frac{103}{30} & + & \frac{3}{30}x_4 & + & \frac{2}{30}x_5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rclcl} x_4 & = & 2 & - & x_3 & - & 2x_5 \\ x_2 & = & 4 & & & + & 2x_5 \\ \hline x_1 & = & 4 & - & x_3 & - & 2x_5 \\ z(x) & = & \frac{57}{30} & - & \frac{3}{30}x_3 & - & \frac{4}{30}x_5 \end{array}$$

Az optimális megoldás:

- $x_1 = 4 \rightarrow$ opkutra 4 órát készül, így 4-est ír.
- $x_2 = 4 \rightarrow$ oprendszerekre 4 órát készül, így 2-est ír.
- optimum: $\frac{57}{30} = 1,9$ -es KKI-t ér el végül.