

4. gyakorlat Különböző pivot szabályok

Nézzük meg milyen lehetőségeink vannak az előző órán bemutatott degeneráció és ciklizáció elkerülésére. Hogyan tudjuk szabályozni, hogy melyik csúcspontba lépjen az algoritmusunk.

1. Bland szabály - Legkisebb indexek módszere

- A lehetséges belépőváltozók közül válasszuk a **legkisebb indexűt**.
- A lehetséges kilépőváltozók közül válasszuk a **legkisebb indexűt**.

Tétel: A szimplex algoritmus biztosan véget ér, ha a legkisebb index szabályt használjuk.

Nézzük meg ezt egy feladaton:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_5 & = & 4 & & + & x_2 & & - & 3x_4 \\
 x_6 & = & 4 & & & & - & x_3 & + & 2x_4 \\
 x_7 & = & 4 & & & - & x_2 & & - & x_4 \\
 x_8 & = & 4 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 \\
 \hline
 z(x) & = & 0 & & + & \underline{2x_2} & + & 4x_3 & - & 2x_4
 \end{array}$$

1. iteráció

- x_2 és x_3 pozitív, ezek közül x_2 -t választjuk, ez a kisebb indexű (most nem számít, hogy x_3 együttthatója nagyobb).
- x_7 és x_8 sorában van negatív együttthatójú változó, ezek egyformán korlátoznak, és ezek közül x_7 a kisebb indexű, ezt választjuk, ez a 3. sor.
- *Klasszikus az x_3 -at választaná a 3. sorban.*

$$\begin{array}{rcccccccc}
 x_5 & = & 8 & & & - & 4x_4 & - & x_7 \\
 x_6 & = & 4 & & - & x_3 & + & 2x_4 & & \\
 x_2 & = & 4 & & & & - & x_4 & - & x_7 \\
 x_8 & = & 0 & - & 2x_1 & - & \underline{x_3} & & + & x_7 \\
 \hline
 z(x) & = & 8 & & + & \underline{4x_3} & & - & 2x_7
 \end{array}$$

2. iteráció

- Csak x_3 pozitív a célfüggvényben.
- x_6 és x_8 sorában van negatív együttthatójú változó, ezek közül x_8 korlátoz jobban ($x_6 = 4 > x_8 = 0$), ezt választjuk, ez a 4. sor.
- *Klasszikus is az x_3 -at választaná a 4. sorban.*

1. iteráció

- A célfüggvényben x_1 és x_2 is pozitív együtthatóságok.
- Az x_2 -t választjuk az 1. sorban, mert:
 - x_1 oszlopában a korlátozások: x_3 -ra $\frac{20}{2} = 10$, x_4 -re 6, x_5 -re 4, ezek közül 4 a legszűkebb. Így itt a növekményünk: $2 * 4 = 8$
 - x_2 oszlopában a korlátozások: x_3 -ra $\frac{20}{4} = 5$, x_4 -re 6, x_5 -re nincs, ezek közül 5 a legszűkebb. Így itt a növekményünk: $2 * 5 = 10$
 - A nagyobb növekményt x_2 választásával kapjuk, még hozzá az 1. sorban, mivel ez a legkorlátozóbb egyenlet.
- *Klasszikus és a Bland is az x_1 -et választaná a 3. sorban.*

$$\begin{array}{rcll}
 x_2 & = & 5 & - \frac{1}{2}x_1 & - \frac{1}{4}x_3 \\
 x_4 & = & 1 & - \frac{1}{2}x_1 & + \frac{1}{4}x_3 \\
 x_5 & = & 4 & - x_1 & \\
 \hline
 z(x) & = & 10 & + \frac{x_1}{2} & - \frac{1}{2}x_3
 \end{array}$$

2. iteráció

- A célfüggvényben csak x_1 pozitív együtthatóság.
- Az x_1 -et választjuk az 2. sorban, mert:
 - x_1 oszlopában a korlátozások: x_2 -ra $\frac{5}{1/2} = 10$, x_4 -re $\frac{1}{1/2} = 2$, x_5 -re $\frac{4}{1} = 4$, ezek közül 2 a legszűkebb. Így itt a növekményünk: $1 * 2 = 2$
 - A nagyobb növekményt x_1 választásával kapjuk, még hozzá az 2. sorban, mivel ez a legkorlátozóbb egyenlet.
- *Klasszikus és a Bland is az x_1 -et választaná a 2. sorban.*

$$\begin{array}{rcll}
 x_2 & = & 4 & - \frac{1}{2}x_3 & + x_4 \\
 x_1 & = & 2 & + \frac{1}{2}x_3 & - 2x_4 \\
 x_5 & = & 2 & - \frac{1}{2}x_3 & + 2x_4 \\
 \hline
 z(x) & = & 12 & & - 2x_3
 \end{array}$$

Nincs több pozitív célfüggvény együttható, azaz optimumban vagyunk. Olvassuk le a megoldásunkat:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 2$$

Az optimum értéke: $z(x) = 12$

3. Összefoglalás

	klasszikus	legnagyobb növekmény	Bland/legkisebb indexek
oszlop választás	pozitív		
	c_i legnagyobb legkisebb index	$c_i \left \frac{b_j}{a_{ij}} \right $ legnagyobb legkisebb index	legkisebb index
sor választás	legsűkebb		
	legkisebb sor index	legkisebb sor index	legkisebb indexű bázis
véges-e	nem feltétlen	nem feltétlen	igen

A különbség a különféle pivot elem választásokkal:

$$\begin{array}{r}
 x_5 = 2 - 4x_1 - 4x_3 + x_4 - 2x_7 - 2x_8 \\
 x_2 = 4 - 4x_1 - 8x_3 - 4x_7 - 4x_8 \\
 x_6 = 2 - 2x_1 - 4x_3 - x_4 - 2x_7 - 2x_8 \\
 x_9 = 2 - x_1 - 2x_3 - x_4 - x_7 - 2x_8 \\
 \hline
 z(x) = 2 - 2x_1 + \frac{2x_3}{1} + \frac{2x_4}{4} + \frac{4x_7}{4} + \frac{4x_8}{4}
 \end{array}$$

(A feladat alatti kék számok a várható növekményt jelzik.)

klasszikus

Bland

legnagyobb növekmény