3. gyakorlat

Nem korlátosság, degeneráció

A mai órán olyan problémákat nézünk meg, melyek által nem jutunk optimális megoldáshoz. Ilyen lehet a nem korlátosság, amikor nem kapunk megoldást. Valamint a degeneráció, ami ciklizációhoz vezet.

Szimplex algoritmus még egyszer:

1. Minden együttható negatív a célfüggvényben?
   IGEN: return optimum
2. Válasszunk egy tetszőleges pozitív együtthatójú célfüggvény változót!
3. Választott változó "fölött" van-e negatív együtthatójú változó?
   NINCS: return nem korlátos
4. A hányadosszabály használatával határozzuk meg a negatív változókra vonatkozó korlátokat, majd válasszuk valamelyik legszűkebb korlátot adó egyenletet!
5. Hajtsuk végre a pivot lépést! $\rightarrow$ új szótár
   goto: 1. lépés

A pirossal szedett pontokon múlt órán már konkrét szabályokat vezettünk, melyet klasszikus generálóelem választásnak nevezünk, és az alábbiakra kell figyelni:

- **Oszlop választás** (2. lépés): A legpozitívabb együtthatójú változók közül egyezőség esetén a legkisebb indexűt választjuk.
- **Sor választás** (4. lépés): A legszűkebb korlátot adó sorok közül egyezőség esetén a legkisebb SORindexűt választjuk.

Nézzük meg milyen problémákat okozhat a klasszikus generálóelem választás!

1. Nem korlátos feladat

Írjuk fel a szótár alakot!

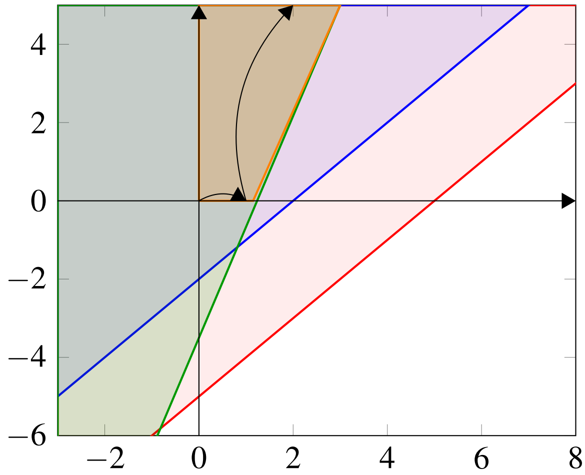
$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 4 \\
3x_1 & & & - & x_3 & \leq & 3 \\
\hline
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \rightarrow & \max
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_4 & = & 5 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\
x_5 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\
x_6 & = & 3 & - & 3x_1 & & & + & x_3 \\
\hline
z(x) & = & 0 & + & \underline{2x_1} & + & x_2 & + & x_3
\end{array}
$$

1. iteráció:

- A célfüggvényben x_1 a legpozitívabb.
- A 3. sor a legkorlátozóbb egyenlet ($x_4 = 5 > x_5 = 2 > x_6 = 1$).

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_4 & = & 4 & - & 2x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & + & \frac{1}{3}x_6 \\
x_5 & = & 2 & + & x_2 & + & \frac{4}{3}x_3 & + & \frac{2}{3}x_6 \\
x_1 & = & 1 & & & + & \frac{1}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_6 \\
\hline
z(x) & = & 2 & + & x_2 & + & \frac{5}{3}x_3 & - & \frac{2}{3}x_6
\end{array}$$

Grafikusan ($x_2 = 0$-ra nézve):



Mind a 2. szótárban, mind az ábrán látható, hogy nem korlátos a feladat. Ezt onnan tudjuk, hogy van olyan pozitívabb célfüggvény együttható, x_3, amihez nincs negatív korlátozó feltétel, vagyis nincs korlátozás.
Hasonlóan az ábrán a második lépés végtelen messzire elmehet, nincs két egymást keresztező, felső határt megszabó egyenes.
A nem korlátosság a könnyebbik eset, ezt a szótár alakban a szabályaink kiszűrik. Viszont a következő eset már nehezebb.

2. Degenerált iterációs lépés

Az algoritmus nem biztos, hogy véges számú lépésben megáll:

- Degenerált iterációs lépés: Olyan szimplex iteráció, amelyben nem változik a bázismegoldás.
- Degenerált bázismegoldás: Olyan bázismegoldás, amelyben egy vagy több bázisváltozó értéke 0.
- Ciklizáció: Ha a szimplex algoritmus valamely iterációja végén **egy korábbi iteráció szótárát kapjuk meg újra**.
- **Tétel:** Ha a szimplex algoritmus nem áll meg, akkor ciklizál.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_5 & = & 0 & - & x_1 & - & 2x_2 & & & - & 2x_4 \\
x_6 & = & 6 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & \\
x_7 & = & 6 & & & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 \\
\hline
z(x) & = & 0 & + & 3x_1 & + & \underline{4x_2} & + & 4x_3 & + & 4x_4
\end{array}$$

1. iteráció:

- A célfüggvényben x_2 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- Az 1. sor a legkorlátozóbb egyenlet ($x_5 = 0 < x_6 = 3 = x_7 = 3$).

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_2 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & & & - & x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
x_6 & = & 6 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 \\
x_7 & = & 6 & + & x_1 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 \\
\hline
z(x) & = & 0 & + & x_1 & + & \underline{4x_3} & & & - & 2x_5
\end{array}
$$

Figyeljük meg! Az első 2 szótárban nem változik a bázismegoldás (x_6 és x_7 változatlanul 6, minden más 0), és az optimális megoldás (0) sem. Ezt a változatlanságot nevezzük degenerációnak.

2. iteráció:

- A célfüggvényben x_3 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- A 2. sor a legkorlátozóbb egyenlet és legkisebb indexű sor (x_2 nem korlátoz, $x_6 = 6 = x_7 = 6$).

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_2 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 & & \\
x_3 & = & 6 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & - & x_6 \\
x_7 & = & 0 & + & x_1 & - & x_4 & & & + & x_6 \\
\hline
z(x) & = & 24 & + & x_1 & + & \underline{8x_4} & + & 2x_5 & - & 4x_6
\end{array}
$$

3. iteráció:

- Célfüggvényben x_4 a legpozitívabb és legkisebb indexű.
- Az 1. sor a legkorlátozóbb egyenlet és legkisebb indexű sor ($x_2 = 0 = x_7 = 0$).

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_4 & = & 0 & - & \frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & - & \frac{1}{2}x_5 & & \\
x_3 & = & 6 & - & x_1 & - & 2x_2 & & & - & x_6 \\
x_7 & = & 0 & + & \frac{3}{2}x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{2}x_5 & + & x_6 \\
\hline
z(x) & = & 24 & - & 3x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_5 & - & 4x_6
\end{array}
$$

Ismét! Az előző két szótárban nem változik a bázismegoldás ($x_3 = 6$ és minden más 0), és az optimális megoldás (24) sem, vagyis degeneráció áll fenn.

3. 2in1 példa

Adott egy standard alakú feladat, írjuk föl rá a szótárat és válasszunk generálóelemet!

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ -\frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 \\ \hline x_1 & + & 2x_2 & \to & \max \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 2 & + & x_1 & - & x_2 \\ x_4 & = & 4 & + & \frac{1}{2}x_1 & - & x_2 \\ x_5 & = & 20 & + & x_1 & - & 4x_2 \\ \hline z(x) & = & 0 & + & x_1 & + & \underline{2x_2} \end{array}$$

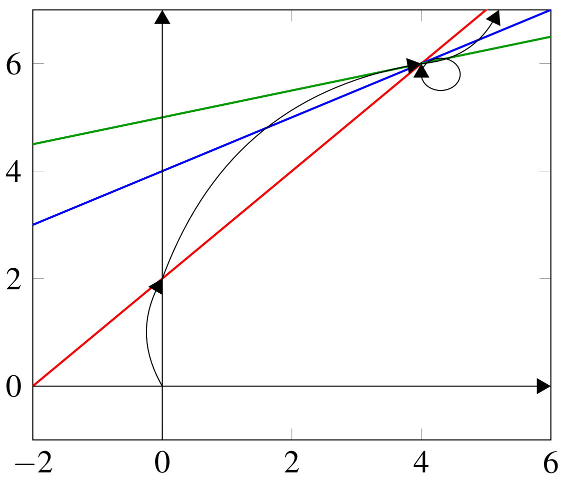
2. iteráció → 3. iteráció

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & 2 & + & x_1 & - & x_3 \\ x_4 & = & 2 & - & \frac{1}{2}x_1 & + & x_3 \\ x_5 & = & 12 & - & 3x_1 & + & 4x_3 \\ \hline z(x) & = & 4 & + & \underline{3x_1} & - & 2x_3 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & 6 & + & x_3 & - & 2x_4 \\ x_1 & = & 4 & + & 2x_3 & - & 2x_4 \\ x_5 & = & 0 & - & 2x_3 & + & 6x_4 \\ \hline z(x) & = & 16 & + & \underline{4x_3} & - & 6x_4 \end{array}$$

4. iteráció

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & 6 & + & x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\ x_1 & = & 4 & + & 4x_4 & - & x_5 \\ x_3 & = & 0 & + & 3x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\ \hline z(x) & = & 16 & + & 6x_4 & - & 2x_5 \end{array}$$

Grafikusan:



Ezen problémák megoldására a pivot szabályok kínálnak majd megoldást (következő óra).