10. gyakorlat

Komplementaritás tétel

Komplementáris jelentése 'kiegészít', vagyis mi a dualitásról való ismereteinket egészítjük ki, így csökkentjük a szükséges számolás mennyiségét.

1. Tételek

Tétel 1:

$x^* = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]$ lehetséges megoldás és $y^* = [y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*]$ lehetséges megoldás, akkor és csakis akkor optimális, ha:

(*) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* = c_j$ és/vagy $x_j^* = 0$ igaz, $j = 1, \ldots, m$
ha $x_j > 0$, akkor y-t a duális feladat j-edik egyenletébe helyettesítve teljesül az egyenlőség

(**) $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i^* = b_i$ és/vagy $y_i^* = 0$ igaz, $i = 1, \ldots, n$
ha $y_i > 0$, akkor x-et az i-edik egyenletbe helyettesítve "="-et kapunk (a feltétel éles)

(Komplementaritás lazaság - 1. pötty)

Kiegészítések:

- Logikai formulaként felírva: $A \cup B = \neg A \to B$ vagy $\neg B \to A$
(például: az esti buliban lesz sör vagy pálinka, ha 10 előtt érkezünk, az azt is jelenti, hogy ha nem lesz sör, akkor azért pálinka biztosan lesz, és fordítva)
- Primál természetes változói és a duál mesterséges változói között teremt kapcsolatot, és fordítva.

Tétel 2:

$x^* = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*]$ lehetséges megoldás $\Leftrightarrow$ optimális megoldás, ha $\exists y$ lehetséges megoldás, amelyre **(*)** és **(**)** igaz.
(Komplementaritás lazaság - 3. pötty)

Kiegészítés: Egy primál feladat optimalitása akkor is ellenőrizhető, ha nem ismerünk egyetlen duál optimumot sem.

2. 1. feladat

Primál feladat:

Vegyünk egy korábbi órai példát:

$$\begin{array}{rcrcr}
\multicolumn{5}{c}{\text{Primál feladat:}} \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
x_1 & + & 3x_2 & \leq & 7 \\
\hline
2x_1 & + & x_2 & \to & \max
\end{array}
\quad \to \quad
\begin{array}{rcrcr}
\multicolumn{5}{c}{\text{Duál feladat:}} \\
y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\
y_1 & + & 3y_2 & \geq & 1 \\
\hline
5y_1 & + & 7y_2 & \to & \min
\end{array}$$

Vegyük fel a korábbi órához hasonlóan az új korlátainkat:
$2x_1 + x_2 \leq (y_1 + y_2)x_1 + (y_1 + 3y_2)x_2 = (x_1 + x_2)y_1 + (x_1 + 3x_2)y_2 \leq 5y_1 + 7y_2$

Ha csak az x_1-re vonatkozóan szeretnénk a feltételeinket úgy kielégíteni, hogy optimumot kapjunk, akkor nem elegendő a "$\leq$"-nek fennállnia, teljes egyenlőségre van szükség, az alábbi módon:

$2x_1 = (y_1 + y_2)x_1$, akkor lehet egyenlő, ha $x_1 = 0$ vagy $2 = y_1 + y_2$ teljesül.

Hasonlóan x_2 esetében.
Ahhoz, hogy ezek az esetek fennálljanak az 1. tétel (*) pontját alkalmaztuk valójában. Az optimum értékét pedig egyszerű próbálgatással megkaphatjuk. Legyen például $x_2 = 0$, ekkor a tétel miatt az első egyenlőtlenségben egyenlőségnek kell lennie, vagyis ha $x_2 = 0$, akkor $x_1 = 5$, ami pont a korábbi órán kapott optimális megoldás.

3. 2. feladat

$$\begin{array}{llcccccc} & & & \text{Primál feladat:} & & & & \\ \text{I.} & x_1 & - & x_2 & & & \leq & -4 \\ \text{II.} & x_1 & & & - & x_3 & \leq & -4 \\ \text{III.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\ \hline & x_1 & + & x_2 & & & \rightarrow & \max \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \text{Duál feladat:} & & & \\ -y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \leq & -1 \\ y_1 & & & - & y_3 & \leq & -1 \\ & & y_2 & - & y_3 & \leq & 0 \\ \hline 4y_1 & + & 4y_2 & - & 10y_3 & \rightarrow & \max \end{array}$$

Kísérletezzünk!

Próbálgassunk primál optimális megoldásokat, anélkül, hogy végigszámolnánk a duálist.
A 2. tétel kiegészítése alapján ez elegendő, hogy a primál megoldásokról eldöntsük valóban optimálisak-e.

Például: $x = (0, 4, 4)$, azaz az x optimális megoldás rendre: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ és $x_3 = 4$.

$$\begin{array}{lc} \text{I.} & \text{"="} \\ \text{II.} & \text{"="} \\ \text{III.} & \text{"<"} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} -y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \leq & -1 \\ -y_1 & & & - & y_3 & = & -1 \\ & & y_2 & - & y_3 & = & 0 \end{array} \quad y_3 = 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$$

y=(-1, 0, 0) ✗

Használjuk fel az imént megismert tételeinket:

- Először is számoljuk ki az optimumok alapján, hogy a primál feladat feltételeiben fenn áll-e az egyenlőség, vagy sem, ezeket jegyezzük fel.
- Az 1. tétel (**) pontja alapján meg tudjuk határozni, hogy az egyes y_i-kre teljesül-e az, hogy egyenlők 0-val. Vagyis y_i akkor lesz nulla, ha a primál feladat i-edik sorában nincs egyenlőség (amiket az előző lépésben kiszámoltunk).
- Az 1. tétel (*) pontja alapján eldönthető, hogy a duális feladatban egyenlőségek szerepelnek-e. Vagyis, ahol a primál optimális megoldásunkban nem 0 szerepel, ott biztosan egyenlőség van a duális feladatban. A többit később tudjuk majd csak eldönteni.

- Utolsó lépésként számoljuk ki az y lehetséges megoldását:
  - y_3-ról már tudjuk, hogy 0.
  - Mivel y_3-ról már tudjuk, hogy 0, így a III. egyenlet alapján y_2 is meghatározható.
  - A II. feltételből szintén y_3 ismerete alapján ki tudjuk számolni y_1-et. Ez viszont ellentmondáshoz vezet, mert a lehetséges megoldásnak nemnegatívnak kell lennie!

Nézzünk még meg néhány lehetséges primál optimális megoldást hasonló módon:

Például: $x = (0, 5, 5)$.

$$
\begin{array}{rcc ccccccc l}
\text{I.} & \text{"<"} & & -y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \leq & \text{-1} & y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \geq 0 \\
\text{II.} & \text{"<"} & \Rightarrow & -y_1 & & & - & y_3 & = & \text{-1} & \\
\text{III.} & \text{"="} & & & & y_2 & - & y_3 & = & 0 & \\
\end{array}
$$
$$\text{y=(0, 0, 0/1)} \text{ ✗}$$

Ellentmondásba futottunk, mert y_3-nak egyidejűleg kéne 0-nak és 1-nek is lennie.

Például: $x = (\frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3})$.

$$
\begin{array}{rcc ccccccc l}
\text{I.} & \text{"="} & & -y_1 & - & y_2 & - & y_3 & = & \text{-1} & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \\
\text{II.} & \text{"="} & \Rightarrow & -y_1 & & & - & y_3 & = & \text{-1} & \\
\text{III.} & \text{"="} & & & & y_2 & - & y_3 & = & 0 & \\
\end{array}
$$
$$y = (\tfrac{-1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}) \text{ ✗}$$

Az első esethez hasonlóan negatív szám került a lehetséges megoldások halmazába, így ellentmondáshoz jutottunk.

Például: $x = (0, 6, 4)$.

$$
\begin{array}{rcc ccccccc l}
\text{I.} & \text{"<"} & & -y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \leq & \text{-1} & y_1 = 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \\
\text{II.} & \text{"="} & \Rightarrow & -y_1 & & & - & y_3 & = & \text{-1} & \\
\text{III.} & \text{"="} & & & & y_2 & - & y_3 & = & 0 & \\
\end{array}
$$
$$\text{y=(0, 1, 1)} \text{ ✓}$$

Leellenőriztük a primál feladat optimalitását a duál optimumok ismerete nélkül.