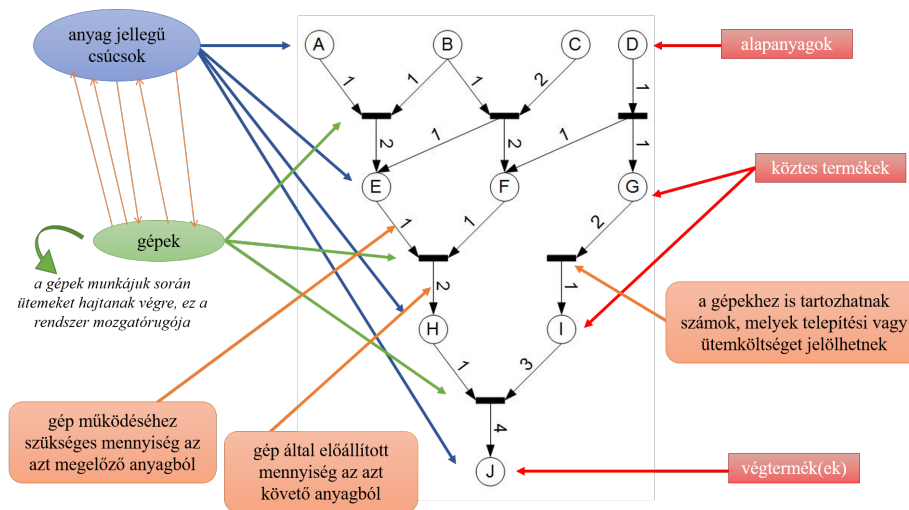


# Gazdasági informatika gyakorlat

## P-Gráfokról röviden

Mester Abigél

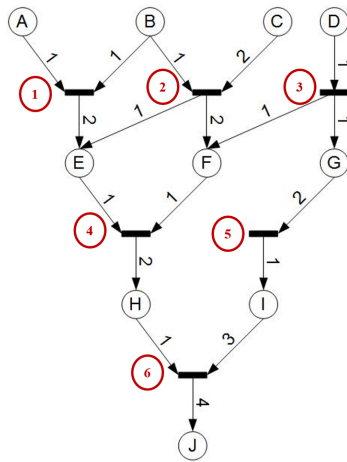
**P-Gráf:** A P-Gráfok olyan speciális **páros** gráfok, ahol a csúcsok két halmazba oszthatók: ezek az anyag jellegű csúcsok, valamint a gépek. A két halmazon belül nem fut él, a halmazok között pedig "oda-vissza járnak" az élek. Másképpen **process** (folyamat) gráfnak is hívjuk őket, mert gyártási folyamatokat hivatottak modellezni. Mivel számos probléma visszavezethető erre a típusra, és könnyű a modelljeiket felírni, így szeretjük őket. Hogyan is néz ki egy P-Gráf:



A gráf jellegéből fakadóan tipikusan 2 klasszikus feladatot különítünk el, melyek célja vagy a gyártott termékekre vonatkozik, vagy a költségekre. Ezeket egy-egy példán át nézzük meg.

# 1. Gyártott mennyiség maximalizálása

**Feladat (P-Gráf probléma I.):** A "Kezdünk bejönni" Kft. az alábbi ábrán látható anyagáramlással és géphasználattal rendelkezik. Az "A", "B", "C", "D" alapanyagokból 50 db áll rendelkezésre, míg az "E", "F", "G", "H", "I" köztes termékekből nincs raktáron. Az ábrán láthatjuk a gépek működéséhez szükséges mennyiségeket. A gépek csak egész ütemeket tudnak végrehajtani. Az irányító problémája, hogy minél több "J" végterméket állítson elő.



**Megoldás:** Egy P-Gráfban két anyag típusú csúcs között a gépek teremtenek kapcsolatot, a folyamat működését ők jellemzik → ezek lesznek a változóink. Kérdés, hogy pontosan mit jelölnek? Ha a célunk minél több végtermék előállítás, akkor annak mennyisége attól függ mennyit készít belőle az utolsó gép, azt pedig a gép ütemszáma adja meg.

Tehát a változóink a gépekre:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  - gépek által végrehajtott ütemek száma (egészek)

Célfüggvény: Az előbbiek alapján minél több J végterméket szeretnénk, ehhez a 6-os gép minden ütemével 4 db-ot csinál → maximalizáljuk.

$$\max 4x_6$$

Feltételek: Mivel a P-Gráfok speciális folyam gráfok, így az egyes anyagokra *majdnem* teljesül az anyagmegmaradás törvénye, annyi kitételrel, hogy a gépek a munkájuk során veszteségesek lehetnek. Ezért általában azt mondhatjuk, hogy az egy gép által felhasznált anyagmennyiség több, mint amit előállít. Röviden szólva: köztes termékekre a **bemenő mennyiség**  $\geq$  **kimenő mennyiség**.

Köztes termékekre:

$$E : 2x_1 + x_2 \geq x_4$$

$$F : 2x_2 + x_3 \geq x_4$$

$$G : x_3 \geq 2x_5$$

$$H : 2x_4 \geq x_6$$

$$I : x_5 \geq 3x_6$$

Tudjuk, hogy minden alapanyagból 50 áll rendelkezésre. Vagyis azok a gépek nem hajthatnak végre több ütemet, mint az alapanyagokból kijön.

Alapanyagokra:

$$A : x_1 \leq 50$$

$$B : x_1 + x_2 \leq 50$$

$$C : 2x_2 \leq 50$$

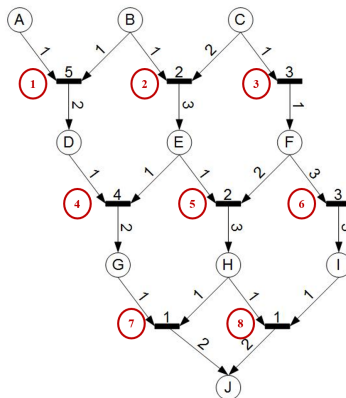
$$D : x_3 \leq 50$$

Korlátok: Korábbiakból tudjuk, hogy az egész változóinkat korlátozni kell, hogy ne lehessenek negatívak.

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6$$

## 2. Költségminimalizálás

**Feladat (P-Gráf probléma IV.):** A "Na ez az" Kft. az alábbi ábrán látható anyagáramlással és géphasználattal rendelkezik. Az "A", "B", "C" alapanyagokból tetszőlegesen sok áll rendelkezésre, míg az "D", "E", "F", "G", "H", "I" köztes termékekből nincs raktáron. Az ábrán láthatjuk a gépek működéséhez szükséges mennyiségeket. Az irányító problémája, hogy minél olcsóbban állítson elő 50 "J" végterméket, miközben a gépek beszerzési költsége 40 és 1-1 ütemük költsége az ábrán látható, valamint az alapanyagok költsége 10 egység és a gépek csak 40 ütemet tudnak végrehajtani.



**Megoldás:** Gépeinkhez most költségek is rendelődnek. Az ütemek költségét minden egyes ütemre ki kell fizessük, vagyis pont ahányszor, amennyi az  $x$  változók értéke lesz. De a gépeket ha használni szeretnénk, előbb meg kell vegyünk, amit csak egyszer fogunk kifizetni. Hogy ezt le tudjuk írni, régi jó barátainkat, a bináris változókat hívjuk segítségül.

Tehát a változók a gépekre:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$  - az ütemek száma (egészek)  
 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8$  - megvásároljuk-e a gépet (binárisak)

Célfüggvény: Célunk minél olcsóbban legyártani valamennyi végterméket, ehhez a kiadások minden formáját össze kell szedjünk:

**költség = telepítés + ütem + alapanyag**

$$\begin{aligned} \min & 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + x_8 + \\ & + 40y_1 + 40y_2 + 40y_3 + 40y_4 + 40y_5 + 40y_6 + 40y_7 + 40y_8 + \\ & + 10(x_1) + 10(x_1 + x_2) + 10(2x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Feltételek:

Köztes termékekre:

$$D : 2x_1 \geq x_4$$

$$E : 3x_2 \geq x_4 + x_5$$

$$F : x_3 \geq 2x_5 + 3x_6$$

$$G : 2x_4 \geq x_7$$

$$H : 3x_5 \geq x_7 + x_8$$

$$I : 3x_6 \geq x_8$$

Végtermékre:

$$J : 2x_7 + 2x_8 \geq 50$$

A gépek csak meghatározott ütemszámot hajthatnak végre, SŐT egy gép nem tud egyetlen ütemet sem végrehajtani, ha azt nem vásároltuk meg. Ezért az ütemek számát korlátozzuk a bináris változókkal.

Ütemek számára ( $y$  és  $x$  változók között kapcsolat):

$$G_i : x_i \leq 40y_i, i = 1, \dots, 8$$

Korlátok:

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 8$$

### 3. P-Gráf felírása és jellemzése

**Feladat:** A Csöves Kft. az alábbiakban látható csőhálózattal rendelkezik. A szám jelenti a cső maximális kapacitását. Az irányító problémája, hogy az "A" pontból minél olcsóbban juttasson el egy fix mennyiségű anyagot "F"-be. Az egyes gépeket megvenni 100 egységbe kerül, és az útvonalakon történő szállítás költsége rendre a következők szerint alakul: 5, 6, 3, 4, 9, 7, 1, 8, 4

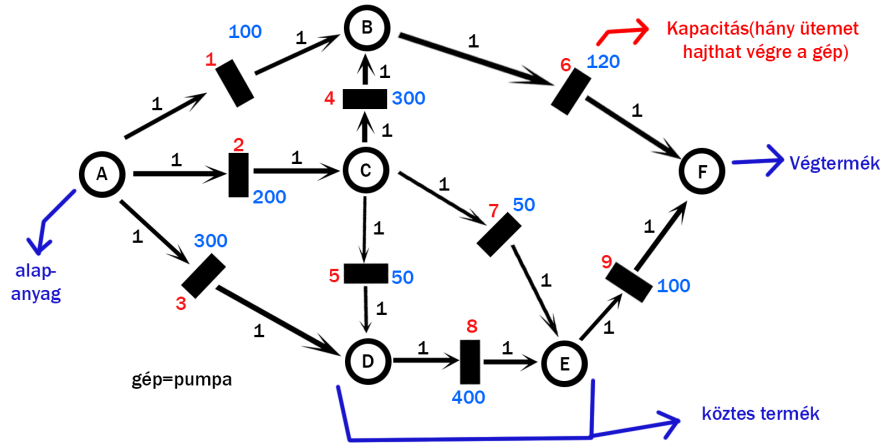
Vezessük vissza P-gráf problémára. Adjuk meg a P-gráfot grafikusán, az alapanyagot/alapanyagokat, és végterméket/végtermékeket. A költségek fajtáit és értékeit, illetve a célt szövegesen.

Útvonal	Kapacitás
A-B	100
A-C	200
A-D	300
C-B	300
C-D	50
B-F	120
C-E	50
D-E	400
E-F	100

**Megoldás:** Egy gráffal leírható probléma könnyen felírható P-Gráffal is. Képzeljünk el, hogy a csövek nem csak átvezetik az anyagot, de ahhoz munka is szükséges (például a csövekbe pumpákat építünk) - építsünk minden élbe egy gépet. Ekkor minden olyan tulajdonsággal, amit egy folyam esetén az élre íránk, most a gép fog rendelkezni. Tehát lesz kapacitása (hány ütemet hajthat végre maximum). Lesz beépítési költsége, és egy-egy pumpálásnak is lesz költsége (ütemköltség).

P-Gráf:

CSÖVES P-GRÁF



Cél: költségminimalizálás - minél olcsóbban állítsunk elő F végterméket.

Jellemzés: (táblázattal)

Táblázattal egy, a gráffal ekvivalens leírást adhatunk meg, ha minden adatot felvesszünk benne. Az egyes gépekre megadjuk, hogy milyen termékkel dolgozik, mit állít elő. Felsoroljuk a költségeit, aszerint, hogy az fix (egyszer kell kifizetni - nem függ az ütemektől), vagy változó (ütemekkel változik), és esetlegesen az ütemek kapacitását, ha van.

gép	anyag be	anyag ki	fix kts.	változó kts.	kapacitás
1	alapanyag: A	köztes T: B	100	5	100
2	alapanyag: A	köztes T: C	100	6	200
3	alapanyag: A	köztes T: D	100	3	300
4	köztes T: C	köztes T: B	100	4	300
5	köztes T: C	köztes T: D	100	9	50
6	köztes T: B	végtermék: F	100	7	120
7	köztes T: C	köztes T: E	100	1	50
8	köztes T: D	köztes T: E	100	8	400
9	köztes T: E	végtermék: F	100	4	100