Operációkutatás I.

Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

4. Előadás

Vektorok

- **Skalár** = egy szám; lehet valós ($\pi = 3.14\ldots$), racionális ($3/4$), egész (5, -8), stb.
- **Vektor** = számok egy sorozata, pl.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \textbf{ oszlopvektor} \text{ vagy } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \textbf{ sorvektor}$$

- **Transzponálás**sal lehet oszlopvektorból sorvektort kapni és fordítva,

pl.: $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ c **skalárszorosa** $c\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} cx_1 & cx_2 & \cdots & cx_n \end{bmatrix}$

például

$$3 \cdot \mathbf{x} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Vektorok

- 2 (azonos méretű) vektor **összege**:
  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ és $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$ esetén

  $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \end{bmatrix}$$

  például

  $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- 2 (azonos méretű) vektor **skalárszorzata**:
  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ és $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}$ esetén

  $$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \cdots + x_n y_n$$

  például

  $$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 6 + 5 + 0 + 0 = 11$$

Mátrixok

- **Mátrix** = számtáblázat; pl. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Egy általános $m \times n$-es mátrix: $\mathbf{A}$ i-edik sora $\mathbf{A}$ j-edik oszlopa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Megjegyzés: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

Mátrixok

- A mátrix **skalárszorosa**:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 4 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 2 (azonos méretű) mátrix **összeadása**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Egy $n \times m$-es és egy $m \times k$-s mátrix **szorzata** $n \times k$-s mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 13 & 11 \\ 15 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 7$$

Mátrixok

- Fontos: mátrixokra általában $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, de $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- Ezt kivéve a mátrix összeadás és szorzás hasonló, mint a (valós) számoknál (zéruselem, egységelem, asszociativitás, disztributivitás)
- Egy n hosszú (oszlop)vektort egy $n \times 1$-es mátrixnak tekintjük
- Mátrix és vektor szorzata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{{\color{blue}3}\times{\color{green}4}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{{\color{green}4}\times{\color{red}1}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}_{{\color{blue}3}\times{\color{red}1}}$$

- Oszlopvektor sorvektorral szorozva mátrix lesz:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{4\times 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 15 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Lineáris egyenletrendszerek

- Egy lineáris egyenletrendszer

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- vagy mátrixos formában írva

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek: Példa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

szorozzuk meg mindkét oldalt (balról!) a következő mátrixszal

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 8/3 & -2 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

ez nem változtat az egyenletrendszer megoldásán (determinánsa $\neq 0$)

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 8/3 & -2 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 8/3 & -2 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 13/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek

- Visszaírva egyenletrendszer formára

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & & -6x_4 & = & 5 \\ & x_2 & & +\frac{13}{3}x_4 & = & -\frac{10}{3} \\ & & x_3 & +\frac{7}{3}x_4 & = & -\frac{4}{3} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 5 & + & 6x_4 \\ x_2 & = & -\frac{10}{3} & - & \frac{13}{3}x_4 \\ x_3 & = & -\frac{4}{3} & - & \frac{7}{3}x_4 \end{array}$$

- A jobboldal **szótár** formában van: x_4-nek értéket adva (pl. $x_4 = 0$) leolvashatunk egy megoldást

Kérdés: Hogyan választottuk ki a mátrixot, amivel szoroztunk?
$\Longrightarrow$ Az $\mathbf{A}$ 3x3-as részmátrixának **inverzét** használtuk
(ld. Gauss elimináció)!

- Egy $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix inverze az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix, amelyre $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ az egységmátrix)

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Vegyük a **Standard alakú LP** feladatot:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\dots,n$$
$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

A szokásos feladatunknál:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 80 \\ 2x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$
max $3x_1+2x_2$

Mesterséges változók bevezetésével:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \qquad i = 1,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n+m$$
$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Példánknál:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 80 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 100 \\ x_1 + x_5 &= 40 \\ x_1,\dots,x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$
$$3x_1+2x_2 \quad \to \max$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Ez **mátrix alakban** a következőképp írható le:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}: \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & 1 & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \qquad \cdot \ \mathbf{x} \ = \ \mathbf{b}$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = z$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = z$$

$$\mathbf{c}^T \qquad \mathbf{x} = z$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

A feladat **mátrix alakban**

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$
$$\max\ \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix}$$
$$\max \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

- Egy szótárat egyértelműen meghatároznak a bázisváltozói.
- Legyen $\mathcal{B}$ a bázisváltozók, $\mathcal{N}$ a nembázis változók **indexhalmaza**, pl.

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 5\} \qquad \mathcal{N} = \{3, 4\}$$

Bontsuk szét a vektorokat és mátrixokat a bázisváltozókhoz és a nem bázisváltozókhoz tartozó részek szerint:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = \left(\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\ \mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T\right) = \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Bontsuk szét az $\mathbf{A}$ mátrixot $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ és $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ szerint:

Legyen $\mathbf{B}$ az **bázisváltozókhoz tartozó** mátrix

Legyen $\mathbf{N}$ a **nembázis változókhoz tartozó** mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \to \mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ and } \mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

és ahogy az előbb

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = \left(\mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T \; \mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T\right) = \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Így a **mátrix alak a szétbontott mátrixokkal**

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}}\end{pmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_3 \\ x_4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{c}_{\mathcal{B}} & \mathbf{c}_{\mathcal{N}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}}\end{pmatrix} = \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \qquad \begin{bmatrix}3 & 2 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_3 \\ x_4\end{bmatrix}$$

Azaz az optimalizálási probléma a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\overline{\max \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T\mathbf{x}_{\mathcal{N}}}$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Feltéve, hogy $\mathbf{B}$ **invertálható**, a következő levezetés igaz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}) &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{x}_{\mathcal{B}} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80\\ 100\\ 40\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}80\\ 100\\ 40\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}80\\ 100\\ 40\end{bmatrix}$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

$$\mathbf{x}_\mathcal{B} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathcal{N} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad : \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_\mathcal{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathcal{N} \quad : \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

A célfüggvényben helyettesítsük $\mathbf{x}_\mathcal{B}$-t a kapott kifejezéssel:

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{c}_\mathcal{B}^T\mathbf{x}_\mathcal{B} + \mathbf{c}_\mathcal{N}^T\mathbf{x}_\mathcal{N} \\ &= \mathbf{c}_\mathcal{B}^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathcal{N}) + \mathbf{c}_\mathcal{N}^T\mathbf{x}_\mathcal{N} \\ &= \mathbf{c}_\mathcal{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_\mathcal{N}^T - \mathbf{c}_\mathcal{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_\mathcal{N} \end{aligned}$$

$$z = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 20 \\ 60 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= 180 - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 180 + \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Szimplex algoritmus mátrix leírása

Összerakva az eddigieket:

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}$$

$$z = \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T - \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_{\mathcal{N}}$$

A **bázismegoldás**, mikor $\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{0}$:

$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, és a célfüggvény érték: $z = \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

A **megoldás optimális**, ha $\mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T - \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \leq \mathbf{0}$, azaz a nembázis változók együtthatói nempozitívak.

A szimplex tábla

Tekintsük újra a minta LP feladatunkat (katonák és vonatok gyártása)

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Max} & z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
& x_1 + x_2 + x_3 & = & 80 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 & = & 100 \\
& x_1 + x_5 & = & 40 \\
& x_1, \dots, x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Ekkor a kezdő bázisra, $\mathcal{B} = \{3,4,5\}$:

$$\mathbf{Ax} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

A szimplex tábla

A következő táblázatos formába tudjuk rendezni a feladatot:

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	b
x_3	1	0	0	1	1	80
x_4	0	1	0	2	1	100
x_5	0	0	1	1	0	40
	0	0	0	3	2	$0+z$

Ezt **szimplex táblának** hívjuk. A bázismegoldás a „szokásos”

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0{,}0, 80, 100, 40).$$

Hajtsunk végre egy pivot lépést a klasszikus szabály szerint. Ehhez csak x_1 és x_2 z-beli együtthatóit (3, illetve 2) kell vizsgálni $\Longrightarrow$ x_1 a **belépő változó**.

A szimplex tábla

Mi legyen a **kilépő változó**? $\Longrightarrow$ hányadosteszt, itt pozitív helyeken! A korábban tekintett negatív együtthatók a rendezés miatt most pozitívak!

Bázisváltozó	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	b	**Hányadosteszt**
x_3	1	0	0	1	1	80	$80/1 = 80$
x_4	0	1	0	2	1	100	$100/2 = 50$
x_5	0	0	1	1	0	40	$40/1 = 40 \leftarrow \min$
	0	0	0	3	2	0	$0{+}z$

$\Longrightarrow$ x_1 belép a bázisba, x_5 kilép a bázisból. A megfelelő (kék) elemet **generálóelemnek** nevezzük ($\text{gen} = 1$)

Mi lesz a következő táblázat?

Jelölje R_1, R_2, R_3, R_z a táblázat sorait fentről lefelé.

A szimplex tábla

		x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	b
R_1	x_3	1	0	0	1	1	80
R_2	x_4	0	1	0	2	1	100
R_3	x_5	0	0	1	1	0	40
R_z		0	0	0	3	2	$0+z$

A pivot lépés utáni szimplex tábla kiszámolása:

Számolás		x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	b
$(-1/\text{gen}) \times R_3 + R_1$	x_3	1	0	**-1**	0	**1**	**40**
$(-2/\text{gen}) \times R_3 + R_2$	x_4	0	1	**-2**	0	**1**	**20**
$(1/\text{gen}) \times R_3$	x_1	0	0	**1**	1	**0**	**40**
$(-3/\text{gen}) \times R_3 + R_z$		0	0	**-3**	0	**2**	**-120** $+ z$

A szimplex tábla

- Az eljárás analóg módon tovább folytatható (és ugyanúgy történik minden, mintha a szótárral dolgoznánk)
- Figyeljük meg, hogy csak a táblázat elemei (számok és sor/oszlop indexek) számítanak $\Longrightarrow$ egyszerű implementációs lehetőség
- Különböző pivot szabályok, leállási feltételek ugyanúgy működnek, mint a szótár esetén
- Érdeklődőknek: ld. Imreh Balázs könyve

Módosított szimplex algoritmus

- A már ismert szimplex algoritmus más megvilágításban
- A működése ugyanaz, csak végrehajtott számítások különböznek
- Minden iterációban az új táblát a kiindulási standard feladat együtthatóiból írjuk fel
  - Minden szótárat/táblát egyértelműen meghatároz a bázisa
  - Csak a belépő- és a kilépőváltozó információjára van szükség
  - Csökken a kerekítési hibák hatása a végeredményre
  - Ritka mátrixokra a gyakorlatban gyorsabbnak bizonyul
- *Jelölés* - $\mathbf{N}_{x_j}$: az $\mathbf{N}$ mátrix x_j változóhoz tartozó oszlopvektora

Módosított szimplex algoritmus egy példán keresztül

Példa.

$$\begin{array}{rrcrcl} & x_1 & - & x_2 & \le & 1 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \le & 3 \\ & & & x_2 & \le & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & \ge & 0 \\ \hline \max & 4x_1 & + & 3x_2 & = & z \end{array}$$

Áttérés egyenletekre

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\ & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 5 \\ \hline 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & = & z \end{array}$$

Módosított szimplex algoritmus

$\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{N} = \{1,2\}$

Mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & & \\ 2 & -1 & & 1 & \\ 0 & 1 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Módosított szimplex algoritmus

$$\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}$$

$$z = \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T - \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_{\mathcal{N}}$$

1. Legyen $\mathbf{y} = \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T\mathbf{B}^{-1}$, szorozva $\mathbf{B}$-vel jobbról oldjuk meg az $\mathbf{y}\mathbf{B} = \mathbf{c}_{\mathcal{B}}$ egyenletrendszert egy Gauss eliminációval

$$\mathbf{y}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

2. $z = \mathbf{y}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T - \mathbf{y}\mathbf{N})\mathbf{x}_{\mathcal{N}}$. Ha $\mathbf{x}_{\mathcal{N}}$ együtthatói $\leq 0, \Rightarrow$ optimális bázis, azaz számoljuk ki a

$$\mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T - \mathbf{y}\mathbf{N} = \begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix} \ \mathcal{N} = \{1{,}2\}$$

3. Ha nem ≤ 0, válasszunk belépőváltozót: x_1 (klasszikus, Bland is)

Módosított szimplex algoritmus

4. Mi legyen a kilépő változó? $\Rightarrow$ hányadosteszt, legszűkebb korlát!

- $\mathbf{x}_\mathcal{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathcal{N}$ (pl. $x_3 = 10 - 5x_1$, hányados=10/5=4)
- $\min\limits_{i=1,2,\dots} \dfrac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_{x_1})_i} = t$ hányadost keressük ahol $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_{x_1})_i > 0$.
- Ha $\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_{x_1}$, szorozzuk $\mathbf{B}$-vel balról, és oldjuk meg a $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{N}_{x_1}$ egyenletrendszert! Ekkor

$$t = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{v_i}, \text{ ha } v_i > 0 \right\}$$

- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/1 \\ 3/2 \\ - \end{matrix} \quad \min = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1$
- $\Rightarrow$ Kilépőváltozó: x_3

Módosított szimplex algoritmus

$$\text{Az új } \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{b} \leftarrow \ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - t\mathbf{v} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \leftarrow \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{array}{c c}\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix} & \begin{array}{c}x_3\\x_4\\x_5\end{array}\end{array}$$

és $x_1 \leftarrow t = 1, \quad \mathcal{B} = \{3{,}4{,}5\}\backslash\{3\} \cup \{1\} = \{1{,}4{,}5\}$ (bázisváltozók)

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$$ (aktuális bázismegoldás) $$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{array}{c c}\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix} & \begin{array}{c}x_1\\x_4\\x_5\end{array}\end{array}$$

Mátrixok: $\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}$, $\mathcal{N} = \{2{,}3\}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & & \\ 2 & -1 & & 1 & \\ 0 & 1 & & & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix}4 & 3 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_{\mathcal{N}} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}$$

HF. folytassuk a 2. iterációval!

Módosított szimplex algoritmus lépései

1. Oldjuk meg az $\mathbf{yB} = \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^T$ egyenletrendszert. Ha $\mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T - \mathbf{yN}$ minden eleme ≤ 0, akkor az aktuális bázismegoldás optimális, STOP.
2. Válasszuk a nembázis változókból belépőváltozónak egy x_i-t, amelyre a $\mathbf{c}_{\mathcal{N}}^T - \mathbf{yN}$ vektor i-edik komponense > 0 (ld. Pivot szabályok)
3. Oldjuk meg a $\mathbf{Bv} = \mathbf{N}_{x_i}$ egyenletrendszert a hányadosteszthez Ha $\mathbf{v} \leq 0$ az LP feladat nem korlátos, STOP.
4. Hányadosteszt: legyen t a legkisebb $\frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_j}{v_j}$, amelyre $v_j \geq 0$, kilépőváltozó valamely x_j, ahol a hányados$=t$
5. Módosítsuk a bázismegoldást: $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - t\mathbf{v}$ és $x_j = t$
6. Módosítsuk a bázist: $\mathcal{B} = \mathcal{B} \setminus \{i\} \cup \{j\}$, folytatás az 1. ponttal

- Az algoritmus minden iterációban csak a célfüggvény együtthatókat és a belépőváltozó együtthatóit számítja ki
- Egy szimplex iterációt két **Gauss eliminációra** vezet vissza