

Döntési rendszerek I.

SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Készítette: London András

9. Gyakorlat

Cournot duopólium modell (1838)

Legyen adott két azonos terméket (pl. ásványvíz) gyártó cég. A termék eladási ára mindkét cég esetén legyen p . Az első cég költsége egy darab gyártott terméken c_1 (egység), a másik cég esetén ez c_2 . Az árat a kereslet határozza meg, a keresleti függvény pedig $p(q)$.

A cégeknek (egymástól függetlenül, egymással versenyezve) azt kell eldönteni, mennyi legyen a leggyártott mennyiség (q_1 , illetve q_2), hogy a saját profitjukat maximalizálják (feltéve, hogy mindent el tudnak adni).

Cournot duopólium modell - Példa

Legyenek a gyártási költségek $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, a kereslet pedig

$$p(q) = 20 - q = 20 - (q_1 + q_2).^1$$

Az első cég haszna

$$u_1(q_1, q_2) = (p - 1)q_1 = (20 - (q_1 + q_2) - 1)q_1 = 19q_1 - q_1q_2 - q_1^2,$$

a második cég haszna pedig

$$u_2(q_1, q_2) = (p - 3)q_2 = (20 - (q_1 + q_2) - 3)q_2 = 17q_2 - q_1q_2 - q_2^2$$

Mindkét cég a saját hasznát igyekszik maximalizálni, vagyis a fenti függvények maximumát keresik.

¹ Figyeljük meg, hogy minél többet termék kerül a piacra, annál kisebb lesz a piaci ár

Cournot duopólium modell - Példa

Az első cég q_1 függvényében maximalizál (mivel ők döntenek q_1 -ről). A függvény maximumának szükséges feltétele szerint

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 19 - 2q_1 - q_2 = 0$$

Hasonlóan, a második cég q_2 szerint maximalizál, ezért szükséges, hogy

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = 17 - 2q_2 - q_1 = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása szerint $q_1 = 7$, $q_2 = 5$ ², a piaci ár pedig $p(12) = 8$ lesz.

² Gondoljuk meg, hogy ez tényleg maximum

Cournot duopólium modell - Példa

Visszahelyettesítve ekkor az első cég haszna $u_1(7,5) = 49$, a második cég haszna $u_2(7,5) = 25$, együttesen 74.

Tegyük fel, hogy csak egy cég van (pl. az egyik megveszi a másikat) és a gyártást $q_1 = q$, $q_2 = 0$ -ra állítja be (vagyis a második cégben leállítja a gyártást). Ekkor az (első) cég haszna

$$(p - 1)q = (20 - q - 1)q = 19q - q^2$$

Ennek a maximuma $q = 9.5$ -nél van. A teljes haszon 90.25, az ár pedig $p(9.5) = 10.5$ lesz. **Vagyis a monopólium esetén (a modell szerint) a cég jól, a fogyasztó rosszul jár.**

Cournot egyensúly

Cournot-egyensúly = A „Cournot-játék” Nash-egyensúlya

Ebben a vállaltok versenyeznek egymással, ahol stratégiahalmazok a gyártási mennyiségek ($q_1 \geq 0$, illetve $q_2 \geq 0$), és mindkét fél a profitját akarja maximalizálni. Az ár a keresleti függvény szerint adott. A q_1^c és q_2^c

Cournot-egyensúly, ha

$$u_1(q_1^c, q_2^c) \geq u_1(q_1, q_2^c) \quad (\forall q_1)$$

és

$$u_2(q_1^c, q_2^c) \geq u_2(q_1^c, q_2) \quad (\forall q_2)$$

Gondoljuk meg, hogy az előbbi számítások tényleg ezt az egyensúlyt adják meg.

Bertrand modell

A modell nagyon hasonló a Cournot-modellhez, csak itt **a vállalatok célja az ár (p_1 , illetve p_2) meghatározása**. A (p_1^b, p_2^b) pár **Nash-egyensúly**, ha

$$u_1(p_1^b, p_2^b) \geq u_1(p_1, p_2^b) \quad (\forall p_1)$$

és

$$u_2(p_1^b, p_2^b) \geq u_2(p_1^b, p_2) \quad (\forall p_2)$$

Feltesszük, hogy a termékek megkülönböztethetlensége miatt a fogyasztó az alacsonyabb árút választja. Ebből adódóan az 1-es cég (2-es hasonlóan) a következő **keresleti függvénnyel** számol:

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_1) & \text{ha } p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}D(p_1) & \text{ha } p_1 = p_2 \\ 0, & \text{ha } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Bertrand modell

Legyen c a termék (mindkét cég számára ugyanaz) előállítási költsége.

Négy különböző egyensúlyi konfiguráció lenne lehetséges:

- 1 $p_1 > p_2 > c \Rightarrow$ nem egyensúly: az 1-es cég eladása és profitja is 0.
 $p_1 = p_2 - \tau$ (τ kicsi) esetén tudja növelni a profitot, miközben a másik cég profitja nem változik
- 2 $p_1 > p_2 = c \Rightarrow$ nem egyensúly: A 2-es cégé a teljes piac, de profitja 0.
 $p_2 = p_1 - \tau$ -ra állítva az árat tud profitot növelni.
- 3 $p_1 = p_2 > c \Rightarrow$ nem egyensúly: $p_1 = p_2 - \tau$ árral az 1-es cég elveszi a teljes piacot.
- 4 $p_1 = p_2 = c \Rightarrow$ egyensúly (gondoljuk meg!)

Bertrand paradoxon: A Nash egyensúly megegyezik a marginális árral („eladási ár = gyártási költség”) \Rightarrow a verseny teljesen eltünteti a profitot. Ugyanakkor két cég elég, hogy eliminálják piaci versenyt.