Döntési rendszerek I.

SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Készítette: London András

3. Gyakorlat

Egy újságárus 20 centért szerez be egy adott napilapot a kiadótól és 25-ért adja el. A nap végéig el nem adott újságok értéktelenné válnak. Az újságárus eddigi tapasztalata szerint napi 6-10 közötti újságot tud eladni, azonos eséllyel. Mennyit újságot vegyen a kiadótól nap elején?

Két probléma merülhet fel, ha nem találja el jól a napi mennyiséget:

1. Tegyük fel, hogy 8-at rendel, csak csak 6-ot vesznek meg. Ekkor $8 \times 20 = 160$-at fizet ki a kiadónak, de csak $6 \times 25 = 150$ bevétele lesz, vagyis 10 centet bukik nap végére.
2. Ha 6-ot rendel, viszont 8-an vennének, akkor eladja a 6-ot és így $6 \times (25 - 20) = 30$ profitra tesz szert, viszont hosszútávon elveszítheti azokat vásárlókat akiknek már nem tud újságot adni.

Megoldás. Legyen $S = \{6{,}7{,}8{,}9{,}10\}$ a lehetséges napi keresletek. Legyen $p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = p_10 = 1/5$ annak a valószínűsége, hogy a kereslet rendre $5{,}6{,}7{,}8{,}9$ vagy 10.

Az az árus i-t rendel, és j a kereslet, akkor egyrészt $20i$-t fizet ki a kiadónak, másrészt $25 \min(i, j)$ bevétele lesz az eladásokból. Ekkor a profit

$$r_{ij} = 25i - 20i = 5i, \text{ ha } i \leq j$$

$$r_{ij} = 25j - 20i, \text{ ha } i \geq j$$

Az alábbi táblázat mutatja az újságárus lehetséges kifizetéseit.

	Kereslet (vásárlók száma)				
Megrendelt újságok	6	7	8	9	10
6	30	30	30	30	30
7	10	35	35	35	35
8	-10	15	40	40	40
9	-30	-5	20	45	45
10	-50	-25	0	25	50

Miért nem rendelünk $1, \ldots, 5$-öt, vagy 10-nél többet? (Ld. **dominancia** fogalma)

Rendeljünk annyit, amely esetén $\min_{j \in S} r_{ij}$ maximális.

Megrendelt újságok	Legrosszabb eset	Kifizetés
6	6,7,8,9,10	30
7	6	10
8	6	-10
9	6	-30
10	6	-50

Azaz ebben az esetben 6 újságot kellene rendelni.

Rendeljünk annyit, amely esetén $\max_{j \in S} r_{ij}$ maximális. Ez a lehetséges legjobb kifizetést számítja.

Megrendelt újságok	Legjobb eset	Kifizetés
6	6,7,8,9,10	30
7	7,8,9,10	35
8	8,9,10	40
9	9,10	45
10	10	50

Azaz ebben az esetben 10 újságot kellene rendelni. Ugyanakkor ha nem „jön" be az optimizmusunk, akkor 50-t is bukhatunk, ha egy nap csak 6 újságot vesznek meg.

Nézzük meg, hogy adott szcenáriók esetén mennyit bukhat az újságárus az optimális döntéshez képest. Például, ha tudná, hogy 7 újságot fognak venni, a legjobb amit tehet az, hogy 7-et rendel a kiadótól és ekkor $r_{77} = 35$ hasza lesz. De ha csak 6-ot rendel, akkor $r_{67} = 30$, vagyis az optimálistól vett különbözet 5.

	Kereslet (vásárlók száma)				
Készlet	6	7	8	9	10
6	$30 - 30 = 0$	$35 - 30 = 5$	$40 - 30 = 10$	$45 - 30 = 15$	$50 - 30 =$ **20**
7	$30 - 10 =$ **20**	$35 - 35 = 0$	$40 - 35 = 10$	$45 - 35 = 10$	$50 - 35 = 15$
8	$30 + 10 =$ **40**	$35 - 15 = 20$	$40 - 40 = 0$	$45 - 40 = 5$	$50 - 40 = 10$
9	$30 + 30 =$ **60**	$35 + 5 = 40$	$40 - 20 = 20$	$45 - 45 = 0$	$50 - 45 = 5$
10	30 + 50 = **80**	$35 + 25 = 60$	$40 - 0 = 40$	$45 - 25 = 20$	$50 - 50 = 0$

A legrosszabb eseteket vastagon kiemeltük. A döntési kritérium értelmében válassza a legjobbat ezek közül, vagyis 6-ot vagy 7-et fog rendelni.

Nézzük meg, hogy hány megrendelt újság esetén lesz a legnagyobb a kifizetés várható értékben

Megrendelt újságok	Várható kifizetés
6	$\frac{1}{5}(30+30+30+30+30)=30$
7	$\frac{1}{5}(10+35+35+35+35)=30$
8	$\frac{1}{5}(-10+15+40+40+40)=25$
9	$\frac{1}{5}(-30-5+20+45+45)=25$
10	$\frac{1}{5}(-50-25+0+25+50)=0$

Ebben az esetben is 6 vagy 7 újság rendelés az ajánlott.

Végül nézzük meg teljesen **általános esetben** a problémát. Legyen c a beszerzési ár, d pedig az eladási ár ($d > c$), a keresletet pedig $(p_1, \dots, p_k)$ eloszlás adja:

$$\Pr(x_i \text{ a kereslet}) = p_i.$$

Legyen X véletlen változó melyre $\Pr(X = x_i) = p_i$ (azaz X a kereslet). Ekkor a várható bevétel

$$\mathbb{E}[(d - c)X].$$

Tegyük fel, hogy t darab újságot rendelünk. A cél az, hogy úgy határozzuk meg t értékét, hogy a várható bevétel maximális legyen.

- ha $t \geq x \in (x_1, \dots, x_n)$ akkor

$$dx - ct = -c(x - t) + (d - c)x$$

- ha $t < x \in (x_1, \dots, x_n)$ akkor

$$dt - ct = -(d - c)(x - t) + (d - c)x$$

Látható, hogy a várható bevétel maximalizálásához a

$$\sum_{x_i:t>x_i} c(t-x_i)p_i + \sum_{x_i:t\le x_i} (d-c)(x_i-t)p_i$$

függvényt kell minimalizálni. Az első tag az eladhatatlan újság miatti veszteséget, míg a második az elszalasztott lehetőséget tükrözi.

Előfordul, hogy a kereslet egy **folytonos eloszlással** adott, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor t-t is érdemes folytonosnak tekinteni, a minimalizálandó függvényünk pedig

$$g(x) = c\int_{-\infty}^{x}(t-z)f(z)dz + (d-c)\int_{x}^{\infty}(z-t)f(z)dz.$$

Ennek minimuma, illetve további példák: ld. Pluhár András előadás jegyzete.