Operációkutatás gyakorlat – 09

Duaitás II.

Emlékeztető: általánosan a Primál-Duál feladatpár a következőképpen néz ki, illetve alakítható át egymásba:

Duál feladat

$$\begin{array}{c}\underline{\min b^T y}\\ A^T y \geq c\\ y \geq 0\end{array}$$

Standard Primál

$$\begin{array}{c}\underline{\max c^T x}\\ Ax \leq b\\ x \geq 0\end{array}$$

Standard Duál

$$\begin{array}{c}\underline{\max -b^T y}\\ -A^T y \leq -c\\ y \geq 0\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\underline{\min -c^T x}\\ -A^{T^T} x \geq -b\\ x \geq 0\end{array}$$

A Duál duálisa

Gyenge dualitás tétel

Ha $x = (x_1, \dots, x_n)$ *lehetséges megoldása* a primál feladatnak és $y = (y_1, \dots, y_m)$ *lehetséges megoldása* a duál feladatnak, akkor

$$c^T x \leq b^T y.$$

Erős dualitás tétel

Ha $x = (x_1, \dots, x_n)$ egy *optimális megoldása* a primál feladatnak és $y = (y_1, \dots, y_m)$ *optimális megoldása* a duál feladatnak, akkor

$$c^T x = b^T y.$$

Továbbá az is igaz, hogy

$$y^T(b - Ax) = 0 \text{ és } x^T(A^T y - c) = 0.$$

Láthatjuk, hogy **a korlátosság és a megoldhatóság nem függetlenek egymástól**:

- Ha a primál nem korlátos, akkor a duálnak nincs lehetséges megoldása
- Ha a duál nem korlátos, akkor a primálnak nincs lehetséges megoldása
- Lehetséges, hogy egyiknek sincs lehetséges megoldása
- De ha mindkettőnek van lehetséges megoldása, akkor mindkettő korlátos
- A primál és a duál feladat egyidejű optimalitása ellenőrizhető

A különböző primál-duál lehetséges és nem lehetséges esetek:

		Primál		
		Nincs lehetséges megoldás	Van lehetséges megoldás	Nem korlátos
Duál	Nincs lehetséges megoldás	√	**X**	√
	Van lehetséges megoldás	**X**	√	**X**
	Nem korlátos	√	**X**	**X**

Komplementáris lazaság

Ha a primál-duál feladatpár

$$\begin{array}{ll} \underline{\max c^T x} & \underline{\min b^T y} \\ Ax \leq b & A^T y \geq c \\ x \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

akkor azt mondjuk, hogy $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, \ldots, y_m)$ komplementárisak, ha

$$y^T(b - Ax) = 0 \text{ és } x^T(A^T y - c) = 0.$$

Vagyis:

- ha $y_i > 0$, akkor x-et az i-edik egyenletbe helyettesítve egyenlőséget kapunk („a feltétel éles")
- ha $x_i > 0$, akkor y-t a duális feladat i-edik egyenletébe helyettesítve az egyenlőség teljesül

Tétel (Komplementáris lazaság)

Tegyük fel, hogy x a primál feladat optimális megoldása.

- Ha y a duál optimális megoldása, akkor x és y komplementáris
- Ha y lehetséges megoldása a duálisnak és komplementáris x-szel, akkor y optimális megoldása a duálnak
- Létezik olyan lehetséges y megoldása a duálnak, hogy x és y komplementáris.

1. Feladat Komplementáris lazaság példa 1:

Adott egy primál feladat és annak duálisa, valamint két hozzájuk tartozó x és y megoldás. Komplementárisak-e?

$$
\begin{array}{rcrrrcr}
 & & 2x_1 & +3x_2 & +1x_3 & \leq & 5 \\
 & & 4x_1 & +1x_2 & +2x_3 & \leq & 11 \\
 & & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \leq & 8 \\
\hline
\max z & = & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrrrcr}
 & & 2y_1 & +4y_2 & +3y_3 & \geq & 5 \\
 & & 3y_1 & +1y_2 & +4y_3 & \geq & 4 \\
 & & 1y_1 & +2y_2 & +2y_3 & \geq & 3 \\
\hline
\min z & = & 5y_1 & +11y_2 & +8y_3 & &
\end{array}
$$

A két lehetséges megoldás: $x = (2, 0, 1)$ és $y = (1, 0, 1)$

Megoldás

Ellenőrizzük, helyes-e? Vegyük sorra mit kapunk az x behelyettesítésével a primál feladatban az egyes feltételekből:

- 1. feltétel: $2 \times 2 + 3 \times 0 + 1 \times 1 = 5$. Mivel szigorú az egyenlőség a duális megoldásban y_1 értéke szigorúan pozitív kell legyen. Ez teljesül is.
- 2. feltétel: $4 \times 2 + 1 \times 0 + 2 \times 1 = 8 < 11$. Nincs egyenlőség $\rightarrow y_2 = 0$ kell teljesüljön. Ez az y vektorunkban így is van.
- 3. feltétel: $3 \times 2 + 4 \times 0 + 2 \times 1 = 8$. Az egyenlőség teljesül $\rightarrow y_3 > 0$ kell legyen. Ez is igaz.

Nézzük meg a duális megoldása (y) behelyettesítése esetén teljesül-e az x vektorra, hogy komplementárisak?

- 1. feltétel: $2 \times 1 + 4 \times 0 + 3 \times 1 = 5$. Mivel szigorú az egyenlőség a duális megoldásban $x_1 > 0$ kell legyen. Ez így is van.
- 2. feltétel: $3 \times 1 + 1 \times 0 + 4 \times 1 = 7 > 4$. Nincs egyenlőség $\rightarrow$ $x_2 = 0$ kell teljesüljön. Ez az x vektorra teljesül is.
- 3. feltétel: $1 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 1 = 3$. Az egyenlőség teljesül $\rightarrow$ $x_3 > 0$ kell legyen. Ez is igaz.

A két megoldásra tehát igaz, hogy komplementárisak. Ezek alapján optimális megoldásai is a primál-duál feladatpárnak.

2. Feladat **Komplementáris lazaság példa 2:**

Adott egy primál feladat és az ehhez tartozó x megoldás. Optimális-e x?

$$\begin{array}{rcrrrcr} & & 1x_1 & -1x_2 & & \leq & -4 \\ & & 1x_1 & & -1x_3 & \leq & -4 \\ & & 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & \leq & 10 \\ \hline \max z & = & 1x_1 & +1x_2 & & & \end{array}$$

a) $x = (0, 4, 4)$
b) $x = (0, 5, 5)$
c) $x = (0, 6, 4)$

Megoldás

Ahhoz, hogy meg tudjuk állapítani, optimális-e az adott megoldás, nem kell végigszámolni a feladatot! Elég, ha a duálisának megpróbálunk egy az adott x megoldással komplementáris megoldását találni.

Ehhez írjuk fel a duális feladat standard alakját:

A duális feladat:

$$\begin{array}{rcrrrcr} & & 1y_1 & +1y_2 & +1y_3 & \geq & 1 \\ & & -1y_1 & & +1y_3 & \geq & 1 \\ & & & -1y_2 & +1y_3 & \geq & 0 \\ \hline \min z & = & -4y_1 & -4y_2 & +10y_3 & & \end{array}$$

A Standard duális feladat:

$$\begin{array}{rcrrrcr} & & -1y_1 & -1y_2 & -1y_3 & \leq & -1 \\ & & 1y_1 & & -1y_3 & \leq & -1 \\ & & & 1y_2 & -1y_3 & \leq & 0 \\ \hline \max z & = & 4y_1 & +4y_2 & -10y_3 & & \end{array}$$

Megoldás a):

Vegyük sorra a primál feltételeit, szigorú egyenlőséget kapunk-e a behelyettesítéssel?

- 1. feltétel: $1 \times 0 - 1 \times 4 = -4$. Mivel szigorú az egyenlőség a duális megoldásban $y_1 > 0$.
- 2. feltétel: $1 \times 0 - 1 \times 4 = -4$. Egyenlőség miatt $\rightarrow y_2 > 0$.
- 3. feltétel: $1 \times 0 + 1 \times 4 + 1 \times 4 < 10$. Az egyenlőség nem teljesül $\rightarrow y_3 = 0$.

A komplementaritás miatt teljesül az is, hogy a duális feladat első egyenlete nem, de a második és harmadik szigorú egyenlőség lesz. Azt pedig a fentiekből tudjuk, hogy $y_3 = 0$. Tehát van egy egyenletrendszerünk:

$$\begin{array}{rrrcr} 1y_1 & & -1y_3 & = & -1 \\ & 1y_2 & -1y_3 & = & 0 \\ & & y_3 & = & 0 \end{array}$$

Ennek egy megoldása: $y_1 = -1, y_2 = 0, y_3 = 0$, ami egy nem lehetséges megoldás, mivel a duál feladat változói is nemnegatívak kell legyenek.

Megoldás b):

Vegyük sorra a primál feltételeit, szigorú egyenlőséget kapunk-e a behelyettesítéssel?

- 1. feltétel: $1 \times 0 - 1 \times 5 < -4$. Mivel nincs egyenlőség a duális megoldásban $y_1 = 0$.
- 2. feltétel: $1 \times 0 - 1 \times 5 < -4$. Nincs egyenlőség $\rightarrow y_2 = 0$.
- 3. feltétel: $1 \times 0 + 1 \times 5 + 1 \times 5 = 10$. Az egyenlőség teljesül $\rightarrow y_3 > 0$.

A komplementaritás miatt teljesül az is, hogy a duális feladat első egyenlete nem ($x_1 = 0$), de a második és harmadik szigorú ($x_2, x_3 > 0$) egyenlőség lesz. Azt pedig a fentiekből tudjuk, hogy $y_1 = y_2 = 0$. Tehát van egy egyenletrendszerünk:

$$\begin{array}{rrrcr} 1y_1 & & -1y_3 & = & -1 \\ & 1y_2 & -1y_3 & = & 0 \\ y_1 & & & = & 0 \\ & y_2 & & = & 0 \end{array}$$

Ennek egy megoldása: $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \{0, 1\}$, ami egy nem lehetséges megoldás, mivel y_3-nak több értéke kellene legyen.

Megoldás c):

Vegyük sorra a primál feltételeit, szigorú egyenlőséget kapunk-e a behelyettesítéssel?

- 1. feltétel: $1 \times 0 - 1 \times 6 < -4$. Mivel nincs egyenlőség a duális megoldásban $y_1 = 0$.
- 2. feltétel: $1 \times 0 - 1 \times 4 = -4$. Egyenlőség $\rightarrow y_2 > 0$.
- 3. feltétel: $1 \times 0 + 1 \times 6 + 1 \times 4 = 10$. Az egyenlőség teljesül $\rightarrow y_3 > 0$.

A komplementaritás miatt teljesül az is, hogy a duális feladat első egyenlete nem ($x_1 = 0$), de a második és harmadik szigorú ($x_2, x_3 > 0$) egyenlőség lesz. Azt pedig a fentiekből tudjuk, hogy $y_1 = 0$ Tehát van egy egyenletrendszerünk:

$$\begin{array}{rrrcr} 1y_1 & & -1y_3 & = & -1 \\ & 1y_2 & -1y_3 & = & 0 \\ y_1 & & & = & 0 \end{array}$$

Ennek egy megoldása: $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1$, ami egy lehetséges megoldás, és komplementáris x-szel, így x optimális.