Operációkutatás gyakorlat – 07

Dualitás I.

Tekintsük a következő (Ajándékgyár) LP feladatot

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 2x_1 + x_2 \\ \hline \text{Feltéve} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

ahol x_1 a gyártandó levendula illatzsák száma, x_2 pedig a gyártandó levendulás illatpárna száma. 1 darab illatzsákért 2$-t, míg 1 darab illatpárna eladásáért 1$-t kapunk. 1 darab zsák gyártásához kell 1 egységnyi pamut és 1 egységnyi levendula, míg 1 darab illatpárna gyártásához kell 1 egységnyi pamut és 3 egységnyi levendula. Pamutból összesen 5 egységnyi, levendulából összesen 7 egységnyi áll rendelkezésre.

Tegyük fel, hogy egy egység pamut piaci ára y_1, egy egység levendula piaci ára pedig y_2 $. A gyártó tehát eladhatja a teljes készletét $5y_1 + 7y_2$ áron a termékek legyártása helyett, vagy vehet további anyagot egységenként y_1, illetve y_2 áron. Tegyük fel azt is, hogy a gyártó az összes legyártott termékét el tudja majd adni. *Mi a jó stratégiája?*

Ha 1 darab levendula zsák gyártási költsége kisebb lenne, mint az eladási ár, azaz $y_1 + y_2 < 2$ (legyen például $y_1 + y_2 = 1.5$), akkor $x_1(y_1 + y_2) = 1.5x_1$ a teljes költsége x_1 darab illatzsák legyártása után, míg a ára $2x_1$, így minden zsák 0.5$ hasznot hoz. Mivel feltettük, hogy mindent el tud adni a gyártó amit legyárt, ezért tetszőlegesen sok levendula zsák gyártásával tetszőlegesen nagy profitra tud szert tenni.

Hasonlóan, ha 1 darab illatpárna gyártási költsége kisebb lenne, mint az eladási ár, azaz $y_1 + 3y_2 < 1$, akkor tetszőlegesen sok illatpárna gyártásával tetszőlegesen nagy profitra tudna szert tenni.

Elméletben a versenypiac nem engedheti, hogy a gyártó tetszőlegesen nagy profitot érhessen el, sőt, úgy állítja be az árakat, hogy a gyártó profitja a lehető legkevesebb legyen. A piac a következő optimalizálást végzi:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = 5y_1 + 7y_2 \\ \hline \text{Feltéve} & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Ez az eredeti LP feladat **duálisa**. Az eredeti LP feladatot *Primál* feladatnak szoktuk nevezni.

Általánosan, a primál-duál feladatpár a következő:

Primál	**Duál**
$\underline{\max c^T x}$	$\underline{\min b^T y}$
$Ax \leq b$	$A^T y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

Ahhoz, hogy a duál feladatot megkapjuk a primálból a következő lépéseket kell megtennünk:

- transzponáljuk az A mátrixot
- „cseréljük fel” b és c vektorok szerepét
- cseréljük az egyenlőtlenségeket $\geq$-re
- Max helyett Min feladat

A primál megoldása:

$$\begin{array}{rcrrr} x_3 & = & 5 & -1x_1 & -1x_2 \\ x_4 & = & 7 & -1x_1 & -3x_2 \\ \hline \max z & = & 0 & +2x_1 & +1x_2 \end{array}$$

I. iteráció:

- A legpozitívabb együttható: x_1.
- A legszűkebb korlátot adó egyenlet: 1.
- Az új bázisváltozók: x_1, x_4.

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 5 & -1x_2 & -1x_3 \\ x_4 & = & 2 & -2x_2 & +1x_3 \\ \hline \max z & = & 10 & -1x_2 & +2x_3 \end{array}$$

Az optimális megoldás:

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 2$$

A célfüggvényérték: $z(\bar{x}) = 10$

A duál megoldása:

A duál feladat:

$$\begin{array}{rrrcr} \min z = & 5y_1 & +7y_2 & & \\ \hline & 1y_1 & +1y_2 & \geq & 2 \\ & 1y_1 & +3y_2 & \geq & 1 \end{array}$$

Hogy ebből **standard alakú** feladat legyen, meg kell szorozni az egész feladatot -1-gyel. Így a minimalizálásból maximalizálás, a $\geq$ irányú egyenlőtlenségekből pedig $\leq$ egyenlőtlenségek lesznek.

Az így kapott standard duál feladat:

$$\begin{array}{rrrcr} \max z = & -5y_1 & -7y_2 & & \\ \hline & -1y_1 & -1y_2 & \leq & -2 \\ & -1y_1 & -3y_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Jól látható, hogy ebben az esetben kétfázisú szimplex algoritmust kell alkalmaznunk, mivel a feltételek konstansai negatívak. Vezessük be y_0-t.

$$\begin{array}{rrrrcr} \max w = & -y_0 & & & & \\ \hline & -y_0 & -1y_1 & -1y_2 & \leq & -2 \\ & -y_0 & -1y_1 & -3y_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Ebből a szótár (ami ebben a formájában nem használható):

$$\begin{array}{rcrrrr} y_3 & = & -2 & +y_0 & +1y_1 & +1y_2 \\ y_4 & = & -1 & +y_0 & +1y_1 & +3y_2 \\ \hline \max w & = & 0 & -y_0 & & \end{array}$$

A legnegatívabb konstansú egyenlet az első, ebből fejezzük ki y_0-t.

$$\begin{array}{rcrrrr} y_0 & = & 2 & -1y_1 & -1y_2 & +1y_3 \\ y_4 & = & 1 & & +2y_2 & +1y_3 \\ \hline \max w & = & -2 & +1y_1 & +1y_2 & -1y_3 \end{array}$$

1. Fázis I. iteráció:

- A legpozitívabb együttható: y_1.
- A legszűkebb korlátot adó egyenlet: 1.
- Az új bázisváltozók: y_1, y_4.

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrrrr} y_1 & = & 2 & -1y_0 & -1y_2 & +1y_3 \\ y_4 & = & 1 & & +2y_2 & +1y_3 \\ \hline \max w & = & 0 & & & \end{array}$$

Az első fázis optimuma 0, így a feladatnak van lehetséges megoldása.

2. Fázis:

Hagyjuk el az y_0-okat, w-t és helyettesítsük be y_1-et az eredeti célfüggvényünkbe (mert ez lett új bázis). Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrcr} y_1 & = & 2 & -1y_2 & +1y_3 \\ y_4 & = & 1 & +2y_2 & +1y_3 \\ \hline \max z & = & 0 & -5(2-1y_2+1y_3) & -7y_2 \\ \max z & = & -10 & -2y_2 & -5y_3 \end{array}$$

Az optimális megoldás:

$$y_1 = 2, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = 1$$

A célfüggvényérték: $z(\bar{y}) = -10$

Vegyük észre: a duál feladat -1-szeresét oldottuk meg, így az eredeti alakú duál feladatot optimuma 10, ami megegyezik a primál feladat optimumával.