Operációkutatás gyakorlat – 06

Kétfázisú szimplex algoritmus

Tekintsük a következő LP feladatot

$$\begin{array}{rrrl} 3x_1 & -1x_2 & -1x_3 & \leq -2 \\ 1x_1 & +1x_2 & & \leq 2 \\ -7x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 9 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \\ \hline z = & -6x_1 & & +6x_3 \end{array}$$

Ebből a kezdő szótár

$$\begin{array}{rrrrr} x_4 = & -2 & -3x_1 & +1x_2 & +1x_3 \\ x_5 = & 2 & -1x_1 & -1x_2 & \\ x_6 = & 9 & +7x_1 & -2x_2 & -3x_3 \\ \hline z = & 0 & -6x_1 & & +6x_3 \end{array}$$

Ez **nem lehetséges** induló szótár, mert abban az esetben, ha az előbb bevezetett (x_4, x_5, x_6) segédváltozókat választjuk kezdő bázisváltozóknak, akkor a kezdő szótárunk nem használható, mivel ha $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, akkor $x_4 = -2$, $x_5 = 2$ és $x_6 = 9$, viszont x_4, x_5, x_6 változókról feltettük, hogy nemnegatívak.

Intuíció: szeretnénk egy olyan lehetséges kezdőmegoldást látni, ahol x_1, x_2, x_3 továbbra is 0.

Segédfeladat felírása (1. Fázis):

- bevezetünk egy új segédváltozót (*mesterséges változó*) $x_0 \geq 0$, amit az eredeti feladat minden feltételéből kivonunk.
- az új célfüggvény $w = -x_0$

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrrl} \max & & & -x_0 & \\ \hline 3x_1 & -1x_2 & -1x_3 & -x_0 & \leq -2 \\ 1x_1 & +1x_2 & & -x_0 & \leq 2 \\ -7x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_0 & \leq 9 \end{array}$$

A bázisváltozók bevezetése után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} \max & & & -x_0 & & & & \\ \hline 3x_1 & -1x_2 & -1x_3 & -x_0 & +x_4 & & & = 2 \\ 1x_1 & +1x_2 & & -x_0 & & +x_5 & & = 2 \\ -7x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_0 & & & +x_6 & = 9 \end{array}$$

Válasszuk ki a **legnegatívabb jobboldalú egyenletet** és fejezzük ki belőle x_0-t. A többi feltételből pedig fejezzük ki a frissen bevezetett változókat.

Itt: a legnegatívabb jobboldalú egyenlet az első. Ebből kifejezzük x_0-t, a másik kettőből x_5-öt és x_6-ot.

Az így kapott szótár:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
x_0 = & 2 & +3x_1 & -1x_2 & -1x_3 & +1x_4 \\
x_5 = & 4 & +2x_1 & -2x_2 & -1x_3 & +1x_4 \\
x_6 = & 11 & +10x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +1x_4 \\
\hline
w = & -2 & -3x_1 & +1x_2 & +1x_3 & -1x_4 \\
z = & 0 & -6x_1 & +0x_2 & +6x_3 & +0x_4
\end{array}
$$

Megkaptuk a segédfeladat első szótárát, amelyhez tartozó bázismegoldás már lehetséges.

Megjegyzés: érdemes az eredeti z célfüggvényünket is feljegyezni, és azon is minden lépésben végrehajtani a módosításokat, mivel a második fázisban úgy lesz rá szükség. A feladat megoldásához csak klasszikus pivot elem választást fogunk alkalmazni.

I. iteráció:

- A legpozitívabb együttható: x_2.
- A legszűkebb korlátot adó egyenlet: 1.
- Az új bázisváltozók: x_2 x_5 x_6.

Az új egyenletrendszer:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
x_2 = & 2 & -1x_0 & +3x_1 & -1x_3 & +1x_4 \\
x_5 = & 0 & +2x_0 & -4x_1 & +1x_3 & -1x_4 \\
x_6 = & 5 & +3x_0 & +1x_1 & -1x_3 & -2x_4 \\
\hline
w = & 0 & -1x_0 & & & \\
z = & 0 & & -6x_1 & +6x_3 &
\end{array}
$$

Az optimális megoldás:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0, \qquad x_6 = 5$$

A célfüggvényérték: $w(\bar{x}) = 0$

Tétel

A standard feladatnak akkor és csak akkor létezik lehetséges megoldása, ha $w = 0$ a hozzá felírt segédfeladat optimuma.

A tétel teljesülése miatt folytathatjuk a megoldást a második fázissal.

2. Fázis

A szimplex algoritmussal folytatjuk az eredeti z célfüggvény optimalizálását. Az új egyenletrendszert a következő lépésekkel kapjuk:

- Ha $x_0 = 0$ szerepel a feltételek között, akkor elhagyjuk
- Ha x_0 bázisváltozó, akkor az egyenletének jobb oldalán lévő nem 0 együtthatójú változók valamelyikét belépőváltozónak x_0-t kilépőváltozónak tekintve végrehajtunk egy pivot lépést
- Elhagyjuk x_0 megmaradt előfordulásait
- A célfüggvény egyenletét lecseréljük az eredeti célfüggvényre, amit átírunk az aktuális bázisváltozóknak megfelelően (ha az első fázisban is számítottuk a z-t, akkor csak töröljük a w célfüggvényt)

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrrr} x_2 = & 2 & +3x_1 & -1x_3 & +1x_4 \\ x_5 = & 0 & +4x_1 & +1x_3 & -1x_4 \\ x_6 = & 5 & +1x_1 & -1x_3 & -2x_4 \\ \hline z = & 0 & -6x_1 & +6x_3 & \end{array}$$

I. iteráció:

- A legpozitívabb együttható: x_3.
- A legszűkebb korlátot adó egyenlet: 1.
- Az új bázisváltozók: x_3 x_5 x_6.

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrrr} x_3 = & 2 & +3x_1 & -1x_2 & +1x_4 \\ x_5 = & 2 & -1x_1 & -1x_2 & \\ x_6 = & 3 & -2x_1 & +1x_2 & -3x_4 \\ \hline z = & 12 & +12x_1 & -6x_2 & +6x_4 \end{array}$$

II. iteráció:

- A legpozitívabb együttható: x_1.
- A legszűkebb korlátot adó egyenlet: 3.
- Az új bázisváltozók: x_1 x_3 x_5.

Az új egyenletrendszer:

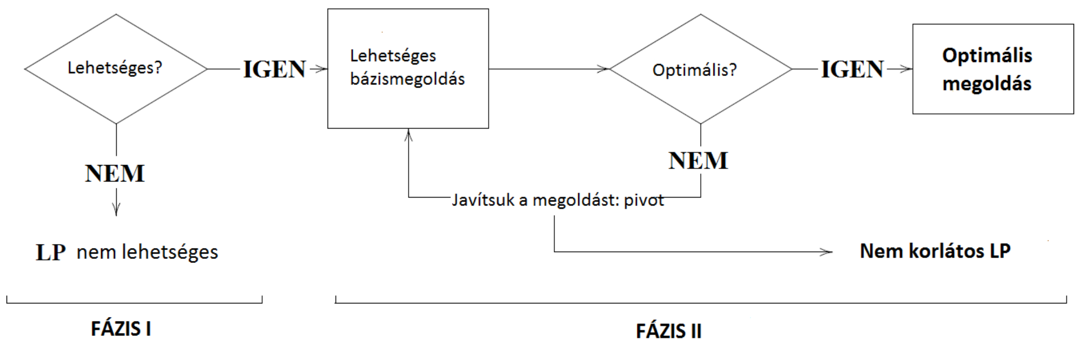
$$\begin{array}{rrrrr}
x_3 = & \frac{13}{2} & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{7}{2}x_4 & -\frac{3}{2}x_6 \\
x_5 = & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_6 \\
x_1 = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{3}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_6 \\
\hline
z = & 30 & & -12x_4 & -6x_6
\end{array}$$

Az optimális megoldás:

$$x_1 = 3/2, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 13/2, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 1/2, \qquad x_6 = 0$$

A célfüggvényérték: $z(\bar{x}) = 30$

A következő ábrán látható a kétfázisú szimplex algoritmus felépítése:



1. Feladat Tekintsük a következő LP feladatot

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -1x_2 & +2x_3 & \leq +4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +1x_3 & \leq -5 \\ -1x_1 & +1x_2 & -2x_3 & \leq -1 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \\ \hline z = & +1x_1 & -1x_2 & +1x_3 \end{array}$$

Megoldás

Ebből a kezdő szótár

$$\begin{array}{rrrrr} x_4 = & +4 & -2x_1 & +1x_2 & -2x_3 \\ x_5 = & -5 & -2x_1 & +3x_2 & -1x_3 \\ x_6 = & -1 & +1x_1 & -1x_2 & +2x_3 \\ \hline z = & 0 & +1x_1 & -1x_2 & +1x_3 \end{array}$$

Ez **nem lehetséges** induló szótár, mert abban az esetben, ha az előbb bevezetett (x_4, x_5, x_6) segédváltozókat választjuk kezdő bázisváltozóknak, akkor a kezdő szótárunk nem használható, mivel ha $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, akkor $x_4 = 4$, $x_5 = -5$ és $x_6 = -1$, viszont x_4, x_5, x_6 változókról feltettük, hogy nemnegatívak.

Segédfeladat felírása (1. Fázis):

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrrl} \text{max} & & & -x_0 & \\ \hline 2x_1 & -1x_2 & +2x_3 & -x_0 & \leq +4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +1x_3 & -x_0 & \leq -5 \\ -1x_1 & +1x_2 & -2x_3 & -x_0 & \leq -1 \end{array}$$

A bázisváltozók bevezetése után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} \text{max} & & & -x_0 & & & & \\ \hline 2x_1 & -1x_2 & +2x_3 & -x_0 & +x_4 & & & = +4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +1x_3 & -x_0 & & +x_5 & & = -5 \\ -1x_1 & +1x_2 & -2x_3 & -x_0 & & & +x_6 & = -1 \end{array}$$

Itt: a legnegatívabb jobboldalú egyenlet a második. Ebből kifejezzük x_0-t, a másik kettőből x_4-et és x_6-ot.

Az így kapott szótár:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_4 = & 9 & +0x_1 & -2x_2 & -1x_3 & +1x_5 \\ x_0 = & 5 & +2x_1 & -3x_2 & +1x_3 & +1x_5 \\ x_6 = & 4 & +3x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +1x_5 \\ \hline w = & -5 & -2x_1 & +3x_2 & -1x_3 & -1x_5 \\ z = & 0 & +1x_1 & -1x_2 & +1x_3 & +0x_5 \end{array}$$

I. iteráció:

- A legpozitívabb együttható: x_2.
- A legszűkebb korlátot adó egyenlet: 3.
- Az új bázisváltozók: x_2 x_0 x_4.

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_4 = & 7 & -\frac{3}{2}x_1 & -\frac{5}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_5 & +\frac{1}{2}x_6 \\ x_0 = & 2 & -\frac{1}{4}x_1 & -\frac{5}{4}x_3 & +\frac{1}{4}x_5 & +\frac{3}{4}x_6 \\ x_2 = & 1 & +\frac{3}{4}x_1 & +\frac{3}{4}x_3 & +\frac{1}{4}x_5 & -\frac{1}{4}x_6 \\ \hline w = & -2 & +\frac{1}{4}x_1 & +\frac{5}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_5 & -\frac{3}{4}x_6 \\ z = & -1 & +\frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_5 & +\frac{1}{4}x_6 \end{array}$$

II. iteráció:

- A legpozitívabb együttható: x_3.
- A legszűkebb korlátot adó egyenlet: 2.
- Az új bázisváltozók: x_2 x_3 x_4.

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrrrr} x_4 = & 3 & +2x_0 & -1x_1 & +0x_5 & -1x_6 \\ x_3 = & \frac{8}{5} & -\frac{4}{5}x_0 & -\frac{1}{5}x_1 & +\frac{1}{5}x_5 & +\frac{3}{5}x_6 \\ x_2 = & \frac{11}{5} & -\frac{3}{5}x_0 & +\frac{3}{5}x_1 & +\frac{2}{5}x_5 & +\frac{1}{5}x_6 \\ \hline w = & 0 & -x_0 & & & \\ z = & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}x_0 & +\frac{1}{5}x_1 & -\frac{1}{5}x_5 & +\frac{2}{5}x_6 \end{array}$$

Az optimális megoldás:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 11/5, \qquad x_3 = 8/5, \qquad x_4 = 3, \qquad x_5 = 0, \qquad x_6 = 0$$

A célfüggvényérték: $w(\bar{x}) = 0$

Folytathatjuk a megoldást a második fázissal.

2. Fázis

Az új egyenletrendszer:

$$
\begin{array}{rrrrr}
x_4 = & 3 & -1x_1 & +0x_5 & -1x_6 \\
x_3 = & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5}x_1 & +\frac{1}{5}x_5 & +\frac{3}{5}x_6 \\
x_2 = & \frac{11}{5} & +\frac{3}{5}x_1 & +\frac{2}{5}x_5 & +\frac{1}{5}x_6 \\
\hline
z = & -\frac{3}{5} & +\frac{1}{5}x_1 & -\frac{1}{5}x_5 & +\frac{2}{5}x_6
\end{array}
$$

I. iteráció:

- A legpozitívabb együttható: x_6.
- A legszűkebb korlátot adó egyenlet: 1.
- Az új bázisváltozók: x_2 x_3 x_6.

Az új egyenletrendszer:

$$
\begin{array}{rrrrr}
x_6 = & 3 & -1x_1 & -1x_4 & +0x_5 \\
x_3 = & \frac{17}{5} & -\frac{4}{5}x_1 & -\frac{3}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_5 \\
x_2 = & \frac{14}{5} & +\frac{2}{5}x_1 & -\frac{1}{5}x_4 & +\frac{2}{5}x_5 \\
\hline
z = & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5}x_1 & -\frac{2}{5}x_4 & -\frac{1}{5}x_5
\end{array}
$$

Az optimális megoldás:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 14/5, \qquad x_3 = 17/5, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0, \qquad x_6 = 3$$

A célfüggvényérték: $z(\bar{x}) = 3/5$