Operációkutatás gyakorlat – 05

Pivot elem választási stratégiák

Bland szabály: (legkisebb indexek módszere)

- A lehetséges belépőváltozók közül vegyük a legkisebb indexűt
- A lehetséges kilépőváltozók közül (negatív együtthatós x_i-k és amire a korlát minimális) vegyük a legkisebb indexűt

Ez a pivot szabály garantálja, hogy az algoritmus véges számú lépésben véget ér.

1. Feladat Vegyük a következő szótárral adott feladatot:

$$\begin{array}{rcrrrrr}
x_5 & = & 4 & & +2x_2 & -2x_3 & -1x_4 \\
x_6 & = & 4 & -1x_1 & -2x_2 & -4x_3 & \\
x_7 & = & 4 & & -3x_2 & -2x_3 & +3x_4 \\
x_8 & = & 4 & -1x_1 & -3x_2 & -4x_3 & -1x_4 \\
\hline
\max z & = & 0 & +3x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +5x_4
\end{array}$$

Megoldás

I. iteráció:

A Bland pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legkisebb indexű pozitív célfüggvény együtthatós változó: x_1
- A legkisebb korlátot adó egyenlet: $\min(-, 4, -, 4)$ miatt a 2. egyenlet.

(A klasszikus választása: x_4 az 1. egyenletben.)

$$\begin{array}{rcrrrrr}
x_5 & = & 4 & +2x_2 & -2x_3 & -1x_4 & \\
x_1 & = & 4 & -2x_2 & -4x_3 & & -1x_6 \\
x_7 & = & 4 & -3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & \\
x_8 & = & 0 & -1x_2 & & -1x_4 & +1x_6 \\
\hline
\max z & = & 12 & -2x_2 & -9x_3 & +5x_4 & -3x_6
\end{array}$$

II. iteráció:

A Bland pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legkisebb indexű pozitív célfüggvény együtthatós változó: x_4
- A legkisebb korlátot adó egyenlet: $\min(4, -, -, 0)$ miatt a 4. egyenlet.

(A klasszikus választása: x_4 a 4. egyenletben.)

$$
\begin{array}{rcrrrrr}
x_5 & = & 4 & +3x_2 & -2x_3 & -1x_6 & +1x_8 \\
x_1 & = & 4 & -2x_2 & -4x_3 & -1x_6 & \\
x_7 & = & 4 & -6x_2 & -2x_3 & +3x_6 & -3x_8 \\
x_4 & = & 0 & -1x_2 & & +1x_6 & -1x_8 \\
\hline
\max z & = & 12 & -7x_2 & -9x_3 & +2x_6 & -5x_8
\end{array}
$$

III. iteráció:

A Bland pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legkisebb indexű pozitív célfüggvény együtthatós változó: x_6
- A legkisebb korlátot adó egyenlet: $\min(4, 4, -, -)$ miatt a 2. egyenlet.

(A klasszikus választása: x_6 az 1. egyenletben.)

$$
\begin{array}{rcrrrrr}
x_5 & = & 0 & +1x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +1x_8 \\
x_6 & = & 4 & -1x_1 & -2x_2 & -4x_3 & \\
x_7 & = & 16 & -3x_1 & -12x_2 & -14x_3 & -3x_8 \\
x_4 & = & 4 & -1x_1 & -3x_2 & -4x_3 & -1x_8 \\
\hline
\max z & = & 20 & -2x_1 & -11x_2 & -17x_3 & -5x_8
\end{array}
$$

Minden célfüggvény együttható negatív. Optimumnál vagyunk. A szótár bázismegoldása:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 4, \qquad x_5 = 0, \qquad x_6 = 4 \qquad x_7 = 16, \qquad x_8 = 0$$

A célfüggvényérték: $z(\bar{x}) = 20$

Legnagyobb növekmény módszere:(legnagyobb meredekség módszere)

- Úgy választunk bázisba bemenő elemet, hogy ez a változás a célfüggvény értékét legjobban növelje.
- **Algoritmus:**

$$\max(c_i \times \min(\text{lehetséges } \left|\frac{b_j}{a_{ij}}\right| \text{ korlátok})),$$

ahol $c_i > 0$ és c_i az x_i célfüggvény együtthatója, valamint a_{ij} negatív, az x_i j. egyenletben lévő együtthatója és b_j a j. egyenlet konstansa.

2. Feladat Vegyük a következő szótárral adott feladatot:

$$\begin{array}{rcrrr} x_3 & = & 20 & -2x_1 & -4x_2 \\ x_4 & = & 6 & -1x_1 & -1x_2 \\ x_5 & = & 4 & -1x_1 & \\ \hline \max z & = & 0 & +2x_1 & +2x_2 \end{array}$$

Megoldás

I. iteráció:

A Legnagyobb növekmény pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A pozitív célfüggvény együtthatós változók: x_1 és x_2
- Algoritmus: $\max(2 \times \min(10, 6, 4), 2 \times \min(5, 6, -))$, alapján $\max(8, 10)$ miatt az x_2-t választjuk az 1. egyenletben, mivel onnan kaptuk a legszűkebb korlátot.

A klasszikus választása: x_1 a 3. egyenletben.

A Bland szabály választása: x_1 a 3. egyenletben.

$$\begin{array}{rcrrr} x_2 & = & 5 & -\frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{4}x_3 \\ x_4 & = & 1 & -\frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{4}x_3 \\ x_5 & = & 4 & -1x_1 & \\ \hline \max z & = & 10 & +1x_1 & -\frac{1}{2}x_3 \end{array}$$

II. iteráció:

A Legnagyobb növekmény pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A pozitív célfüggvény együtthatós változók: x_1
- Algoritmus: $\max(1 \times \min(10, 2, 4), -)$, alapján $\max(2, -)$ miatt az x_1-t választjuk az 2. egyenletben, mivel onnan kaptuk a legszűkebb korlátot.

A klasszikus választása: x_1 a 2. egyenletben.

A Bland szabály választása: x_1 a 2. egyenletben.

$$
\begin{array}{rcrrr}
x_2 & = & 4 & -\frac{1}{2}x_3 & +1x_4 \\
x_1 & = & 2 & +\frac{1}{2}x_3 & -2x_4 \\
x_5 & = & 2 & -\frac{1}{2}x_3 & +2x_4 \\
\hline
\max z & = & 12 & & -2x_3
\end{array}
$$

Minden célfüggvény együttható negatív. Optimumnál vagyunk. A szótár bázismegoldása:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 4, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 2$$

A célfüggvényérték: $z(\bar{x}) = 12$