Operációkutatás gyakorlat – 03

Szimplex algoritmus

Szimplex algoritmus

1. A szótárban $c_j \leq 0$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re?
   - Igen: az aktuális bázismegoldás optimális, az algoritmus megáll
   - Nem: folytatás a 2. ponttal
2. Válasszuk a nembázis változók közül belépőváltozónak valamely x_k-t, amelyre $c_k > 0$ (pozitív célfügvény együttható).
3. $a_{ik} \geq 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, m$-re?
   - Igen: az LP feladat nem korlátos, az algoritmus megáll
   - Nem: folytatás a 4. ponttal
4. Legyen l valamely index, amelyre $|\frac{b_l}{a_{lk}}|$ minimális és $a_{lk} < 0$
5. Hajtsunk végre egy pivot lépést úgy, hogy x_k legyen a belépőváltozó és az l. feltétel bázisváltozója legyen a kilépő, folytatás az 1. ponttal

Definíció

Pivot lépés: új szótár megadása egy bázis és nembázis változó szerepének felcserélésével

Belépő változó: a szimplex algoritmus egy iterációjának belépőváltozója az a nembázis változó, ami a következő szótárra áttérés hatására bázisváltozóvá válik

Kilépő változó: a szimplex algoritmus egy iterációjának kilépőváltozója az a bázisváltozó, ami a következő szótárra áttérés hatására nembázis változóvá válik.

Szótárak ekvivalenciája: két szótár ekvivalens, ha lehetséges megoldásaik és a hozzájuk tartozó célfüggvényértékek rendre megegyeznek.

Pivot szabály: olyan szabály, ami egyértelművé teszi, hogy a szimplex algoritmusban mely változók legyenek a belépő- és a kilépőváltozók, ha több változó is teljesíti az alapfeltételeket.

Klasszikus Szimplex algoritmus pivot szabálya:

- A lehetséges belépőváltozók közük válasszuk a legnagyobb c_k értékűt, több ilyen esetén azok közül a legkisebb indexűt.
- A lehetséges kilépőváltozók közül válasszuk a legkisebb l indexű egyenlet változóját.

Feladat megoldás Szimplex algoritmussal

$$\begin{array}{rcrrr} x_3 & = & 200 & -5x_1 & -5x_2 \\ x_4 & = & 24 & & -x_2 \\ x_5 & = & 320 & -10x_1 & -5x_2 \\ \hline \max z & = & 0 & +25x_1 & +20x_2 \end{array}$$

A szótár bázismegoldása:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 200, \qquad x_4 = 24, \qquad x_5 = 320$$

A célfüggvényérték: $z(\bar{x}) = 0$

I. iteráció:

A klasszikus pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legpozitívabb együtthatójú változó: x_1
- A legkisebb korlátot adó egyenlet: $\min(\frac{200}{5}, \frac{24}{0}, \frac{320}{10})$ miatt a 3. egyenlet.

Fejezzük ki a 3. egyenletből x_1-et és írjuk a többi x_1 helyére is be.

$$x_1 = 32 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{10}x_5$$

Ezek után az új feltételrendszerünk:

$$\begin{array}{rcrcc} x_3 & = & 200 & -5(32 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_5) & -5x_2 \\ x_4 & = & 24 & & -x_2 \\ x_1 & = & 32 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{10}x_5 \\ \hline \max z & = & 0 & +25(32 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_5) & +20x_2 \end{array}$$

A beszorzások végrehajtása és egyszerűsítés után kapjuk:

$$\begin{array}{rcrrr} x_3 & = & 40 & -\frac{5}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_5 \\ x_4 & = & 24 & -x_2 & \\ x_1 & = & 32 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{10}x_5 \\ \hline \max z & = & 800 & +\frac{15}{2}x_2 & -\frac{5}{2}x_5 \end{array}$$

A szótár bázismegoldása:

$$x_1 = 32, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 40, \qquad x_4 = 24, \qquad x_5 = 0$$

$$\text{A célfüggvényérték: } z(\bar{x}) = 800$$

II. iteráció:

A klasszikus pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legpozitívabb együtthatójú változó: x_2
- A legkisebb korlátot adó egyenlet: $\min(16, 24, 64)$ miatt az 1. egyenlet.

Fejezzük ki az 1. egyenletből x_2-t és írjuk a többi x_2 helyére is be.

$$\frac{5}{2}x_2 = 40 - x_3 + \frac{1}{2}x_5$$

$$x_2 = 16 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5$$

Ezek után az új feltételrendszerünk:

$$\begin{array}{rcccc}
x_2 & = & 16 & -\frac{2}{5}x_3 & +\frac{1}{5}x_5 \\
x_4 & = & 24 & -(16 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5) & \\
x_1 & = & 32 & -\frac{1}{2}(16 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5) & -\frac{1}{10}x_5 \\
\hline
\max z & = & 800 & +\frac{15}{2}(16 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_5) & +5x_5
\end{array}$$

A beszorzások végrehajtása és egyszerűsítés után kapjuk:

$$\begin{array}{rcccc}
x_2 & = & 16 & -\frac{2}{5}x_3 & +\frac{1}{5}x_5 \\
x_4 & = & 8 & +\frac{2}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_5 \\
x_1 & = & 24 & +\frac{1}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_5 \\
\hline
\max z & = & 920 & -3x_3 & -x_5
\end{array}$$

Optimumnál vagyunk, mivel minden célfüggvény együttható negatív.

A szótár bázismegoldása:

$$x_1 = 24, \qquad x_2 = 16, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 8, \qquad x_5 = 0$$

$$\text{A célfüggvényérték: } z(\bar{x}) = 920$$