Operációkutatás gyakorlat – 10

Játékelmélet

Fogalmak:

Zérus összegű játékok

Teljes információs, véges, kétszemélyes, zérus összegű játékok

- **Teljes információs:** mindenki ismeri a játékszabályokat, ki mit léphet, mik a lépések eredményei
- **Véges:** véges számú játékos (most 2!), véges számú lehetséges lépéssel
- **Zérus összegű:** pontosan annyit nyer az egyik játékos, mint amennyit a másik veszít

Az ilyen játékok leírhatók egy mátrixszal, ezért röviden mátrix játékoknak nevezzük őket.

Kifizetési mátrix: olyan M mátrix, amelyben az m_{ij} elemek a sor játékos nyereményei, amennyiben a sor játékos i-t, az oszlop játékos a j stratégiát játssza a játékban.

Tiszta stratégia: A lehetőségek közül mindig csak egyet használunk, ehhez ragaszkodunk végig.

Kevert stratégia: A különböző stratégiákat mind igénybe vesszük különböző arányban.

Pareto optimum: Olyan stratégia pár, amit nem tudunk úgy megváltoztatni, hogy valamelyik játékos kifizetése jobb legyen úgy, hogy a másik játékosé nem lesz rosszabb.

Nem zérus összegű játékok: A két fél nemcsak egymástól, hanem egymással együttműködve valamilyen külső forrásból is nyerhet. Így szélesebb jelenségkört vizsgálhatunk meg mint a zérusösszegű játékoknál.

Nash egyensúly: Stratégiaegyüttes, amely a játékosok azon stratégiáját tartalmazza, amely a legjobb válasz a többi játékos egyensúlyi stratégiájára.

Pontosabban: amennyiben a többi játékos egyike sem változtat az aktuális stratégiáján, akkor az adott játékosnak sem érdemes változtatnia, mert nem járna jobban a változtatással.

Zérus összegű játékok tulajdonságai:

Nyeregpont:

Vezessük be a következő jelöléseket:

- m_i = az i. sor minimuma
- $m = \max_i\{m_i\}$
- M_j = az j. oszlop maximuma
- $M = \min_j\{M_j\}$

Egy játéknak akkor van nyeregpontja, ha $m = M$.

1. Feladat Adjuk meg a következő mátrixjáték nyeregpontját!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás

Számoljuk ki az egyes értékeket:

- $m_1 = -1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 0$ a sorminimumok
- $M_1 = 3$, $M_2 = 2$, $M_3 = 1$, $M_4 = 3$ az oszlopmaximumok
- $m = \max\{-1, 1, 0\} = 1$
  (azaz a sorjátékos a 2. stratégiája választása esetén bármit is tesz az oszlopjátékos, garantáltan nem nyer 1-nél kevesebbet)
- $M = \min\{3, 2, 1, 3\} = 1$
  (azaz az oszlopjátékos a 3. stratégiáját választva bármit is tesz a sorjátékos, garantáltan nem veszít 1-nél többet)

Mivel $M = m$ a játéknak van nyeregpontja, méghozzá akkor, ha a sorjátékos a 2. stratégiáját, az oszlopjátékos pedig a 3. stratégiáját játssza.

Ekkor a játék értéke: $A_{2,3} = 1$.

Dominancia

Egy mátrixjátékban az i. sor *dominálja* a j-et, ha $\forall k$-ra $a_{i,k} \geq a_{j,k}$. (Tehát ha minden érték nagyobb vagy egyenlő az i. sorban, mint a j-edikben oszloponként.)

Hasonlóan az i. oszlop *dominálja* a j-et, ha $\forall k$-ra $a_{k,i} \leq a_{k,j}$. (Tehát ha minden érték kisebb vagy egyenlő az i. oszlopban, mint a j-edikben soronként.)

2. Feladat

Adjuk meg a következő mátrixjáték dominanciáit!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 10 & -7 & -9 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Megoldás

Itt a 3. sor dominálja az 1. sort, mert $7 > 3$, $0 > -2$, $8 > 5$.

Hasonlóan a 2. oszlop dominálja az 1. oszlopot, mert $-2 < 3$, $-7 < 10$, $0 < 7$.

3. Feladat

Adjuk meg a következő mátrixjáték dominanciáit!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 8 & 3 & 6 \\ 8 & -2 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás

A dominált sorokat és oszlopokat elhagyhatjuk, mivel azok olyanok, amiket biztos nem éri meg játszani.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 8 & 3 & 6 \\ 8 & -2 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{A 3. sor dominálja a 2. sort.}} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & -5 & -4 \\ 7 & -1 & 8 & 3 & 6 \\ 8 & -2 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{A 4. oszlop dominálja az } 1,3,5. \text{ oszlopokat.}} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{A 2. sor dominálja a 3. sort.}} \equiv \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Példa nem zérus összegű játékra:

Fogoly dilemma:

A fogolydilemma a nem zéró összegű játékok egy fajtája. Egy súlyos bűntény kapcsán két gyanúsítottat letartóztat a rendőrség. Sajnos közvetlen bizonyíték csak gyorshajtásról van, ezért elkülönítik őket egymástól. A vizsgálóbíró szeretné lezárni az ügyet, így felkeresi az egyik rabot:

„Ha beismerő vallomást teszel, és ezzel segítesz tisztázni az ügyet, akkor szabadon engedlek, ezt a kis sebességtúllépést elfelejtjük. Ebben az esetben a társadat 5 évre lecsukjuk és lezárjuk az ügyet. De ez csak akkor érvényes, ha a társad nem vall. Ha ő is vall, akkor nem sokat ér a vallomásod és mindketten 3 évet kaptok. Ha egyikőtök sem vall, akkor rendkívül szigorúak leszünk a csúnya száguldozással kapcsolatban, és mindketten 1 évet kaptok. A társadnak is ugyanezt az ajánlatot tettem."

Akárcsak a többi nem kooperatív játékelméleti problémában, itt is feltételezzük, hogy az egyes játékosok saját nyereségüket tartják szem előtt, tekintet nélkül a másik résztvevő nyereségére.

Írjuk fel a játék mátrixát és mondjuk meg, mi a racionális stratégia:

		Második játékos	
		Vall	Tagad
Első játékos	Vall	-3,-3	0,-5
	Tagad	-5,0	-1,-1

A racionális (optimális) stratégia az, amikor mindkét fogoly tagad.

A fogoly dilemma Nash egyensúlya: A fogolydilemmánál a Nash-egyensúly nem vezet mindkét fél számára optimális megoldáshoz, mert ez ebben az esetben azt jelenti, hogy mindkét fogoly vall a másik ellen, még akkor is, ha a kooperációval nagyobb lenne a nyereségük. Bár mindkét fogoly jobban járna, ha kooperálnának, és egyikük sem vallana a másik ellen, mégis mindkettejüknek személyes érdekében áll vallani, akkor is ha korábban kooperációt ígértek egymásnak.

Nézzük az első játékos szemszögéből és induljunk az optimális *Tagad-Tagad* állapotból. Ekkor ha az első játékos stratégiát vált (*Vall*), jobban jár, mivel 1 év letöltendő helyett 0 büntetést kap (ekkor a második játékos még tagad, ami neki 5 év büntetést jelent). Ekkor viszont a második játékos jár jobban, ha a *Tagad* helyett ő is *Vall* inkább, hiszen így 5 év büntetés helyett csak 3-at kap. Ekkor a *Vall-Vall* állapotban állunk, ami egy olyan stratégiaegyüttes, ahonnan bármelyik játékos stratégiát váltana egyedül (tehát az egyik úgy döntene, hogy mégis *Tagad*) sokkal rosszabbul járna. Ezért ez a Nash egyensúly.