Logika gyakorlat – 03
Rezolúció

A rezolúciós algoritmus:

- **Input:** egy CNF //ha nem ilyet kapunk, akkor előbb CNF-re hozzuk
- **Output:** Kielégíthetetlen-e?
- **Módszer:**
  - A CNF-et klózok halmazaként, a klózokat literálok halmazaként fogjuk fel
  - Listát vezetünk a klózokról. Egy klózt felvehetünk, ha:
    - az input CNF egy klóza VAGY
    - két, a listán már szereplő klóz *rezolvense*:

      $p \in C_1$ és $\neg p \in C_2$, akkor felvehetjük C_1 és C_2 (p menti) rezolvensét: $(C_1 - \{p\}) \cup (C_2 - \{\neg p\})$.

      Rezolúciós következtetés: $\{F \vee G, \neg F \vee H\} \vDash G \vee H$
  - Ha az üres klóz rákerül a listára, akkor kielégíthetetlen
  - Ha nem, és többféle klózt nem tudunk felvenni a listára, akkor kielégíthető

1. Feladat

Igazoljuk rezolúcióval, hogy kielégíthetetlen:

$$(((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee ((r \rightarrow \neg p) \wedge r)) \wedge s \wedge (s \rightarrow p)$$

Megoldás

CNF-re hozás:

1. Nyilak eliminálása:

$$(((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg r \vee \neg p) \wedge r)) \wedge s \wedge (\neg s \vee p)$$

2. Negáció bevitele: Ez most készen van.
3. Disztributivitás:

$$\begin{aligned}&(((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg r \vee \neg p) \wedge r)) \wedge s \wedge (\neg s \vee p)\\ \equiv&((\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee r)) \wedge s \wedge (\neg s \vee p)\end{aligned}$$

Rezolúció:

- Vegyük fel a halmazt a klózokról:
  $\Sigma = \{\{\neg p, q, \neg r\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{\neg q, r\}, \{s\}, \{p, \neg s\}\}$
  Ha egy klózban egy változó ismétlődik, elég egyszer feltüntetnünk, hiszen többszörösen felvéve sem változtat a klóz értékén.

- Lista:

1.	$\{\neg p, q, \neg r\}$	$\in \Sigma$
2.	$\{\neg p, q, r\}$	$\in \Sigma$
3.	$\{\neg p, q\}$	$\mathrm{Res}(1, 2)$
4.	$\{p, \neg s\}$	$\in \Sigma$
5.	$\{q, \neg s\}$	$\mathrm{Res}(3, 4)$
6.	$\{\neg q, r\}$	$\in \Sigma$
7.	$\{\neg s, r\}$	$\mathrm{Res}(5, 6)$
* 8.	$\{s\}$	$\in \Sigma$
9.	$\{r\}$	$\mathrm{Res}(7, 8)$
10.	$\{p\}$	$\mathrm{Res}(8, 4)$
11.	$\{q\}$	$\mathrm{Res}(3, 10)$
12.	$\{\neg p, \neg q, \neg r\}$	$\in \Sigma$
13.	$\{\neg q, \neg r\}$	$\mathrm{Res}(10, 12)$
14.	$\{\neg r\}$	$\mathrm{Res}(11, 13)$
15.	$\square$	$\mathrm{Res}(9, 14)$

Még egyszer: az 1. klózban szerepel $\neg r$, a 2. klózban r, így rezolvensük az a klóz, amit úgy kapunk, hogy 1-ből kivesszük $\neg r$-t, 2-ból kivesszük r-t, és minden egyéb literált, ami marad a két klóz valamelyikében, felvesszük a rezolvensbe. Persze mindet csak egyszer.

Egységklóz! Heurisztika: amit tudunk, rezolváljunk egységklózzal.

* Ha egy klóz valódi részhalmaza egy másik klóznak (mint a 9. a 7.-nek), akkor a bővebbet elhagyhatjuk. Vele később már nem érdemes rezolválnunk.

Mivel $\square \in \mathrm{Res}^*(\Sigma)$, így $\Sigma \vDash \downarrow$.

(Ahol $\mathrm{Res}^*(\Sigma)$ a Σ-ból levezethető összes klóz halmaza.)

Ami **TILOS**: NEM rezolválhatunk egyszerre két literál mentén!

Jó ötletnek tűnhet, de nem az:

1.	$\{\neg p, q, \neg r\}$	$\in \Sigma$
2.	$\{\neg p, \neg q, r\}$	$\in \Sigma$
3.	$\{\neg p\}$	$\mathrm{Res}(1, 2)$

Ezért: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$-ból kapjuk:

1. $\{p, q\}$ $\quad \in \Sigma$
2. $\{\neg p, \neg q\}$ $\quad \in \Sigma$
3. $\Box$ $\quad \mathrm{Res}(1,2)$

Pedig ez a formula kielégíthető: pl: $p = 1$ és $q = 0$ értékadással!

Felhasználva azt, hogy $\Sigma \models F$ pontosan akkor, ha $\Sigma \cup \{\neg F\} \models\downarrow$, a rezolúciós algoritmus következtetések igazolására is használható a következő módon:

- **Input:** formulák egy Σ halmaza és egy F formula.
- **Output:** Igaz-e, hogy $\Sigma \models F$?
- **Algoritmus:**
  - CNF-re hozzuk Σ összes elemét és a $\neg F$ formulát is. Az összes kapott klóz halmazát jelölje Σ'.
  - Hajtsunk végre Σ'-n rezolúciót. Ha $\Box \in \mathrm{Res}^*(\Sigma')$ akkor $\Sigma \models F$, különben $\Sigma \not\models F$

2. Feladat Igazoljuk rezolúcióval, hogy:

$$\{s, (p \vee s) \rightarrow (p \wedge r)\} \models p \wedge (q \rightarrow q)$$

Megoldás

$\{s, (p \vee s) \rightarrow (p \wedge r), \neg(p \wedge (q \rightarrow q))\}$ kielégíthetetlenségét mutatjuk meg

CNF-re hozás:

- s önmaga
- $(p \vee s) \rightarrow (p \wedge r) \equiv (\neg(p \vee s)) \vee (p \wedge r) \equiv (\neg p \wedge \neg s) \vee (p \wedge r) \equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg s \vee p) \wedge (\neg s \vee r)$
- $\neg(p \wedge (q \rightarrow q)) \equiv \neg(p \wedge (\neg q \vee q)) \equiv \neg p \vee \neg(\neg q \vee q) \equiv \neg p \vee (q \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

A Σ halmazunk:

$\Sigma = \{\{s\}, \{\neg p, p\}, \{\neg p, r\}, \{\neg s, p\}, \{\neg s, r\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$

- $\{\neg p, p\}$: Triviális klóz, van benne p és $\neg p$ is. Az ilyen klózokat, amikben egy változó és annak negáltja is szerepel, ne vezessük le, felesleges!
- $\{\neg p, r\}$ és $\{\neg s, r\}$: Az összes klózban r csak pozitívan szerepel. Az ilyen klózokat, melyekben olyan változó van, ami az összes klózban csak pozitívan vagy csak negatívan szerepel, szintén ne használjuk! Az adott változót úgysem tudnánk rezolválásnál használni.

Rezolúció:

1. $\{s\}$ $\in \Sigma$ //egységklózzal érdemes próbálkozni
2. $\{\neg s, p\}$ $\in \Sigma$
3. $\{p\}$ $\mathrm{Res}(1,2)$
4. $\{\neg p, q\}$ $\in \Sigma$
5. $\{q\}$ $\mathrm{Res}(3,4)$
6. $\{\neg p, \neg q\}$ $\in \Sigma$
7. $\{\neg q\}$ $\mathrm{Res}(3,6)$
8. $\square$ $\mathrm{Res}(5,7)$

Mivel $\square \in \mathrm{Res}^*(\Sigma)$, így $\Sigma \vDash \downarrow$. Így az eredeti állítás is igaz.

A levezetést lista helyett le is rajzolhatjuk: