Logika gyakorlat – 02
Következtetés, konjunktív normálforma

Vezessük be a következő jelöléseket:

- $\mathrm{Mod}(F)$: az F formula modellje(i) (olyan értékadás(ok), amik mellett F igaz)
- $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(F)$: az $\mathcal{A}$ értékadás F egy modellje (azaz $\mathcal{A}(F) = 1$)
- $\vDash F$: az F formula tautológia (azaz minden értékadás mellett igaz)
- $F \vDash G$: az F formulának logikai következménye a G formula
  - $\mathrm{Mod}(F) \subseteq \mathrm{Mod}(G)$
  - Ha $\mathcal{A}(F) = 1$, akkor $\mathcal{A}(G) = 1$ is
- A formulák helyére formulahalmazt is írhatunk: $\Sigma, \Delta, \Gamma, \ldots$
  - $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$: akkor, ha $A \in \mathrm{Mod}(F)$ minden $F \in \Sigma$-ra
- $\uparrow$ és $\downarrow$: azonosan igaz és azonosan hamis
- $F \equiv G$: F ekvivalens G-vel
  - $\mathrm{Mod}(F) = \mathrm{Mod}(G)$

Fejezzük ki a kielégíthetetlenséget a $\vDash$ jellel:

- F kielégíthetetlen $\Leftrightarrow$ $F \underbrace{\vDash \downarrow}$

  $\mathrm{Mod}(F) \subseteq \mathrm{Mod}(\downarrow) = \emptyset$: azok az értékadások, amik mellett $\downarrow$ igaz $\Rightarrow$ Ilyen nincs!
  $\mathrm{Mod}(F) = \emptyset$
  F-nek nincs modellje, azaz F kielégíthetetlen.

- Mit jelent, hogy $F \vDash \uparrow$?
  - Semmi különöset, minden F-re igaz
  - $\mathrm{Mod}(F) \subseteq \mathrm{Mod}(\uparrow) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ értékadás}\}$ //az összes értékadás
  - „Mod(F)-ben értékadások vannak.” Ez így mindig igaz.
- Hogyan mondanánk ezeknek a jeleknek a felhasználásával, hogy F tautológia?
  - $\uparrow \vDash F$
  - $\mathrm{Mod}(\uparrow) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$
  - Mod($\uparrow$)-ban minden értékadás benne van, és mivel ez részhalmaza Mod(F)-nek, így utóbbiban is minden értékadásnak benne kell lenni.

Fejezzük ki a $\Sigma \vDash F$-et kielégíthetetlenséggel!

$$\boxed{\Sigma \vDash F \;\Leftrightarrow\; \Sigma \cup \{\neg F\} \vDash \downarrow}$$

Ezt fogjuk intenzíven használni!

Konjunktív normálforma (CNF)

- Klózok éselése (konjunkciója)
  - Literálok vagyolása (diszjunkciója)
    - változó vagy negáltja

pozitív literál   negatív literál

üres klóz (jele: $\square$, értéke: 0)

egyelemű klóz $\rightarrow$ egységklóz

CNF-re hozás (A sorrend fontos!)

1. $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ eliminálása
   - $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$
   - $F \leftrightarrow G \equiv (\neg F \vee G) \wedge (F \vee \neg G)$
2. Negálások bevitele zárójelekbe
   - $\neg\neg F \equiv F$
   - $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$
   - $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$
3. Disztributivitás *(Akkor van „baj", ha két CNF-et vagyolunk)*
   - $(F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$
   - $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$
   - $(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) \vee (D_1 \wedge \ldots \wedge D_m) \equiv \bigwedge_{i,j}(C_i \vee D_j)$, $i = 1, \ldots, n$ és $j = 1, \ldots, m$

1. Feladat Hozzuk CNF-re: $\Big(\neg(p \wedge q) \wedge \big((p \wedge \neg r) \rightarrow q\big)\Big)$

Megoldás

1. Nyilak eliminálása:

$$\Big(\neg(p \wedge q) \wedge \big(\neg(p \wedge \neg r) \vee q\big)\Big)$$

2. Negáció bevitele:

$$\begin{aligned}
&\Big(\neg(p \wedge q) \wedge \big(\neg(p \wedge \neg r) \vee q\big)\Big) && \textit{//kívülről befelé haladva}\\
\equiv&\Big((\neg p \vee \neg q) \wedge \big((\neg p \vee r) \vee q\big)\Big) && \textit{//vigyük be a negálásokat}\\
\equiv&\big((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r \vee q)\big)
\end{aligned}$$

3. Disztributivitás:

   Készen vagyunk, a formula már CNF-ben van.

2. Feladat

Hozzuk CNF-re: $\big((r \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg s)\big) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)$

Megoldás

1. Nyilak eliminálása:

$$\big((r \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg s)\big) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)$$

2. Negáció bevitele:

$$\begin{aligned} &\big((r \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg s)\big) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s) \\ \equiv &\big((r \wedge \neg q) \vee (p \wedge s)\big) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s) \\ \equiv &\big((r \wedge \neg q) \vee (p \wedge s)\big) \wedge (p \vee \neg q) \wedge r \wedge s \end{aligned}$$

3. Disztributivitás:

$$\begin{aligned} &\big((r \wedge \neg q) \vee (p \wedge s)\big) \wedge (p \vee \neg q) \wedge r \wedge s && \textit{//belülről kifelé alkalmazzuk} \\ \equiv &\big((r \vee p) \wedge (r \vee s)\big) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (p \vee \neg q) \wedge r \wedge s && \textit{//a disztributivitást} \\ \equiv &\big((r \vee p) \wedge (r \vee s)\big) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee s) \wedge r \wedge s && \textit{//}(p \vee \neg q)\ \textit{egyszer is elég} \end{aligned}$$

3. Feladat

Hozzuk CNF-re: $\Big[\big((q \rightarrow p) \vee s\big) \rightarrow \big((p \vee q) \wedge \neg r\big)\Big] \rightarrow \neg\big((r \rightarrow q) \wedge \neg s\big)$

Megoldás

1. Nyilak eliminálása:

$$\neg\Big[\neg\big((\neg q \vee p) \vee s\big) \vee \big((p \vee q) \wedge \neg r\big)\Big] \vee \neg\big((\neg r \vee q) \wedge \neg s\big)$$

2. Negáció bevitele:

$$\begin{aligned} &\neg\Big[\neg\big((\neg q \vee p) \vee s\big) \vee \big((p \vee q) \wedge \neg r\big)\Big] \vee \neg\big((\neg r \vee q) \wedge \neg s\big) \\ \equiv &\Big[\big((\neg q \vee p) \vee s\big) \wedge \big(\neg(p \vee q) \vee r\big)\Big] \vee \big(\neg(\neg r \vee q) \vee s\big) \\ \equiv &\Big[\big((\neg q \vee p) \vee s\big) \wedge \big((\neg p \wedge \neg q) \vee r\big)\Big] \vee \big((r \wedge \neg q) \vee s\big) \end{aligned}$$

3. Disztributivitás:

$$\begin{aligned} &\Big[(\neg q \vee p \vee s) \wedge \big((\neg p \wedge \neg q) \vee r\big)\Big] \vee \big((r \wedge \neg q) \vee s\big) \\ \equiv &\Big[(\neg q \vee p \vee s) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)\Big] \vee \big((r \vee s) \wedge (\neg q \vee s)\big) \\ \equiv &\Big[(\neg q \vee p \vee s) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)\Big] \vee \big((r \vee s) \wedge (\neg q \vee s)\big) && \textit{//itt csak átszíneztünk} \\ \equiv &(\neg q \vee p \vee s \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee p \vee s \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee r \vee s) \\ &\wedge (\neg p \vee r \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee \neg q \vee s) \end{aligned}$$