Közelítő és szimbolikus számítások

3. gyakorlat

Gauss elimináció, LU felbontás

Készítette:

Gelle Kitti

Csendes Tibor

Somogyi Viktor

London András

Deák Gábor

jegyzetei alapján

1. Egyenletrendszerek

A numerikus eljárások egyik legfontosabb részét adják az $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ alakú egyenletrendszerek megoldásai. *Lineáris egyenletrendszer*nek nevezzük a következő alakú egyenletrendszereket:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

ahol $a_{ij} \in \mathbb{C}$, tehát az együtthatók komplex számok is lehetnek. Egy egyszerű példa lineáris egyenletrendszerre:

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +4x_2 & +8x_3 & = & 5 \\ 6x_1 & +1x_2 & +5x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Mátrix alakban felírva:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Az $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ alakú lineáris egyenletrendszereknek pontosan akkor van egyetlen megoldásuk, ha az A mátrix nem szinguláris (ekkor reguláris, azaz $\det(A) \neq 0$, A rangja n), és ekkor ez a megoldás $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Definíció 1.1. *Az A mátrix rangja a lineárisan független oszlopvektorainak száma.*

Definíció 1.2. *Vektorok egy halmazát lineárisan függetlennek nevezzük, ha egyikük sem fejezhető ki a többi vektor lineáris kombinációjaként.*

Definíció 1.3. *A szinguláris mátrix egy olyan négyzetes mátrix, amely nem invertálható. Egy A négyzetes mátrix akkor és csak akkor szinguláris, ha a determinánsa* 0*, vagyis* $\det(A) = 0$.

Definíció 1.4. *Egy négyzetes A mátrix akkor invertálható, ha létezik olyan $n \times n$-es B mátrix, melyre igaz, hogy:*

$$AB = BA = I_n,$$

ahol I_n az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli. Ekkor B-t az A mátrix inverzének nevezzük (A^{-1}).

Feladat 1. *Oldjuk meg a fenti egyenletet a Matlab segítségével!*

Megoldás:

```
>> A = [2 4 8; 6 1 5; 2 3 3];
>> b = [5 7 1]';
>> x = inv(A)*b %ez egyenerteku az x=A\b utasitassal
```

A fenti módszer hátránya, hogy nagyon műveletigényes, illetve numerikusan instabil, emiatt ezt nem fogjuk használni (bár ebben a feladatban mindent kiszámol úgy ahogy kell, nézzük meg egy 1000×1000 méretű mátrixra).

2. Gauss-elimináció

Olyan mátrixot viszonylag egyszerűen meg tudunk adni, amellyel balról való beszorzás azt eredményezi, hogy egy $\boldsymbol{a}$ vektor k-adik alatti együtthatói eltűnnek:

$$M_k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -a_{k+1}/a_k & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -a_n/a_k & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Itt az M_k mátrixban minden ki nem írt együttható nulla. Az a_k együtthatót *generálóelem*nek hívjuk, magát az M_k mátrixot pedig *eliminációs mátrix*nak, vagy *Gauss-transzformációs mátrix*nak.

A Gauss-elimináció lényege, hogy egy $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ alakú lineáris egyenletrendszerből eliminációs mátrixok segítségével olyat alakítunk ki, amely baloldalán egy felső háromszögmátrix van, így az egyenletrendszerbe való behelyettesítést meg tudjuk oldani, és így megkapjuk magának az egyenletrendszernek a megoldását is.

Példa. Hajtsuk végre az adott egyenletrendszeren a Gauss-eliminációt!

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +6x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ x_1 & +5x_2 & +15x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & +10x_2 & +4x_3 & = & 6 \end{array}$$

Megoldás.
Írjuk fel mátrixos alakban az egyenletrendszert! ($A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 15 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Egyenletek megoldásakor a bevett gyakorlat, hogy mindkét oldalon azonos műveleteket végzünk. Jelen esetben Gauss-transzformációs mátrixokat kell keresnünk, és ezekkel beszoroznunk az egyenlet mindkét oldalát balról, mivel a célunk az A mátrix felső háromszögmátrixszá alakítása. Röviden tehát a következő átalakításokat kell végrehajtanunk:

$$M_2 M_1 A\boldsymbol{x} = M_2 M_1 \boldsymbol{b}$$

Először hajtsuk végre az A mátrixon a Gauss-elimináció lépéseit:

$$M_1 A = A_1$$

$$M_2 A_1 = A_2$$

Azaz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 15 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 27/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 27/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 27/2 \\ 0 & 0 & -29/4 \end{pmatrix}$$

Majd a $\boldsymbol{b}$ vektoron is, ugyanazokkal a transzformációs mátrixokkal:

$$M_1 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b_1}$$

$$M_2 \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{b_2}$$

Azaz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Az egyenletünket átrendeztük, most már újra felírhatjuk az átalakított formát és leolvashatjuk a megoldásokat:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 27/2 \\ 0 & 0 & -29/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = -\frac{6}{29}$$
$$x_2 = \frac{3 - \frac{27}{2}x_3}{2} = \frac{84}{29}$$
$$x_1 = \frac{2 - 6x_2 - 3x_3}{2} = -\frac{214}{29}$$

Ellenőrzés.

$$-2\frac{214}{29} + 6\frac{84}{29} - 3\frac{6}{29} = 2$$
$$-\frac{214}{29} + 5\frac{84}{29} - 15\frac{6}{29} = 4$$
$$-3\frac{214}{29} + 10\frac{84}{29} - 4\frac{6}{29} = 6$$

3. LU felbontás

Az előbbi eljárás során észrevehettük, hogy egy alsó és egy felső háromszög-mátrix szorzatára bontottuk az A mátrixot. Ez fogja motiválni az LU felbontást, amit a következőkben definiálunk.

Definíció 3.1. *Az LU felbontás az eredeti A mátrixot két háromszög-mátrix szorzatára bontja: $A = LU$, ahol*

$$L = M^{-1} = (M_{n-1} \dots M_1)^{-1} = M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} = L_1 \dots L_{n-1}$$

De mégis hogy jött ez ki? Az előző konstrukcióból tudjuk, hogy $\mathrm{M}_{n-1}M_{n-2} \dots M_1 A$ mátrix egy felsőtrianguláris mátrix, ez lesz most az U.

Azt is tudjuk, hogy bármilyen reguláris X mátrixra $A = X^{-1}XA$ igaz, mert az X^{-1} és az X ,,kiüti egymást", azaz egységmátrix lesz belőle. Tehát ha $X = M_{n-1}...M_1$, akkor az előbbi alapján kapjuk, hogy $A = (M_{n-1}..M_1)^{-1}(M_{n-1}..M_1)A$, ebből az elejét, az $(M_{n-1}..M_1)^{-1}$-et nevezzük L-nek, a maradék pedig az előbbi U mátrix.

Foglalkozzunk egy kicsit az $L = (M_{n-1}M_{n-2}...M_1)^{-1}$ sorozattal. Ugyan így is ki lehetne számolni, de invertálni lassan tudunk mátrixot. Ehelyett azt használjuk ki, hogy $(M_{n-1}M_{n-2}...M_1)^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}...M_{n-1}^{-1}$ (mátrixok szorzatának inverze mindig egyenlő a mátrixok inverzeinek fordított sorrendben vett szorzatával), mert ezeket az M_i Gauss-transzformációs mátrixokat könnyű invertálni, és így az $L_i = M_i^{-1}$ mátrixokat könnyen kiszámolhatjuk, csak össze kell majd szorozni és megvan az L mátrixunk. Mivel az L_i-k alsótrianguláris mátrixok, ezért az egész L is az lesz, mivel alsótrianguláris mátrixok szorzata alsótrianguláris. És ha ez a felbontás megvan, akkor az egyenletrendszerünk $LUx = b$ alakba kerül.

Példa. Adjuk meg az előző példa A mátrixának LU felbontását a most tanult módszerekkel!

Megoldás. Az inverz mátrixot ebben az esetben könnyen megkapjuk, mindössze annyit kell tennünk, hogy a nem főátlóbeli elemek előjelét az ellentétesre változtatjuk. Tehát:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$L = L_1 \cdot L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = M_2 \cdot M_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 27/2 \\ 0 & 0 & -29/4 \end{pmatrix}$$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 27/2 \\ 0 & 0 & -29/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 15 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} = A$$

3.1 Lineáris egyenletrendszer megoldása LU felbontással

Ahhoz, hogy eljussunk egy lineáris egyenletrendszer megoldásához, a következő lépéseket kell megtennünk:

1. Bontsuk fel az A mátrixot LU alakra ($\Rightarrow LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$).
2. Oldjuk meg az $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ egyenletet $\boldsymbol{y}$-ra.
3. Oldjuk meg az $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ egyenletet $\boldsymbol{x}$-re.

Példa. Az eddigi példánk megoldása a fenti LU felbontásos egyenlettel.

Megoldás.
$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 27/2 \\ 0 & 0 & -29/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -214/29 \\ 84/29 \\ -6/29 \end{pmatrix}$$

3.2 LU felbontás Matlabban

A Matlabban a következő függvénnyel tudunk egy LU felbontást végrehajtani:

`>> [L,U] = lu(A)` – egy felső trianguláris és egy permutált alsó trianguláris mátrixot eredményez úgy, hogy $A = LU$.
`>> [L,U,P] = lu(A)` – egy felső trianguláris, egy alsó trianguláris és egy permutációs mátrixot eredményez úgy, hogy $PA = LU$.

```
>> A = [2 6 3; 1 5 15; 3 10 4];
>> b = [2 4 6]';
>> [L,U] = lu(A);
>> y = L\b;
>> x = U\y
x =
   −7.3793
    2.8966
   −0.2069
```

4. Feladatok

1. Legyen A egy 100×100 méretű, 1-től 10-ig véletlen elemeket tartalmazó mátrix, valamint legyen b egy 100×1 méretű, 1-től 10-ig véletlen elemeket tartalmazó vektor. Oldjuk meg az $Ax = b$ egyenletet Matlabban (LU felbontás nélkül, az inverzzel való szorzást használva)!

2. Hasonló módon generáljunk egy A és b mátrixot, majd oldjuk meg azt a Matlab segítségével, az LU felbontást használva!

3. Hasonlítsuk össze a két módszer futásidejét! Tehát: generálni kell egy A-t és egy b-t, majd végrehajtani a hagyományos módszert és az LU felbontást is ugyan azon a generált A és b mátrixon. A futási időket a `tic()` és `toc()` függvényhívásokkal ellenőrizhetjük.