

A kényszererős fékezett inga stabilizálása és kontrollja

Bánhelyi Balázs

2007. augusztus 20.

1. fejezet

A kényszererős fékezett inga stabilizálása és kontrollja

Az eddigi szakirodalomból ismert, hogy a később bemutatott kényszererős fékezett inga kaotikus [4, 5]. A kaotikus viselkedés létezésében fontos szerepet tölt be a rendszer instabil megoldása. Jelen dolgozatban a tekintett inga ezen instabil megoldását fogjuk megkeresni. Ezek után megismerünk olyan eljárásokat, mellyel lehetséges ezen megoldást stabilizálni. Ezen eljárások alapja az, hogy az inga felfüggesztési pontjára külső erőket alkalmazunk. Természetesen, amikor ezt a tényezőt „kikapcsoljuk”, akkor visszaáll az eredeti instabil állapot.

Kétféle stabilizálási eljárást ismertet a szakirodalom. Az egyik az, amikor a dinamikai rendszer állapotától függően befolyásoljuk a rendszert. Ezt vagy folytonosan, vagy diszkrét időközönként tehetjük meg. Ez a típusú kontroll, melyet „visszacsatolós technikának” is neveznek, a kezdő állapotok sokkal szélesebb körére stabilizálja a kívánt állapotot. A másik eljárás az, amikor a dinamikai rendszer éppen aktuális állapotától nem függ a rendszerre ható erő. Ebben az esetben a kezdő állapotok sokkal kisebb halmazára tapasztalható a stabilizálódás.

Kezdetben megmutatjuk a vizsgált kényszererős fékezett inga periodikus megoldásait és megadjuk ezen megoldások kezdőértékeinek egy matematikailag is megbízható befoglalását. Majd a karakterisztikus multiplikátor módszerrel meghatározzuk ezen megoldások stabilitását/instabilitását.

Ezek után a hagyományos ingán bemutatunk egy az inga állapotaitól független stabilizálási eljárást, melyet alkalmazunk az általunk tekintett kényszererős ingán is. Majd a korábban megismert számítógépes eljárással bebizonyítjuk a multiplikátorok segítségével, hogy ez az eljárás valóban stabilizálja az inga instabil megoldását.

Végül szintén a hagyományos ingán bemutatunk egy folytonos visszacsatolós módszert. Ezzel a módszerrel is megpróbáljuk stabilizálni a kényszererős ingát, illetve bizonyítani stabilitását.

1.1. A periodikus megoldások

1.1.1. A kényszererős fékezett inga

Jelen fejezetben egy kényszererős fékezett ingát vizsgálunk, mely egy 1 szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszer. Egy m tömegű pontszerű test lóg egy l hosszú súlytalan, merev rúdon (lásd az 1.1. ábrát). Ez azt jelenti, hogy a pontszerű test egy kör mentén mozoghat, melynek sugara l . A vizsgált ingára három erő hat. Az egyik a gravitáció, amelynek nagysága g és függőlegesen lefelé hat. A másik a légellenállás, amelynek nagysága a test sebességétől függ, és iránya ellentétes a pontszerű test mozgásának irányával. A forgási sebesség és ezen erő hányadosa legyen konstans, és jelöljük ezt $(-\gamma)$ -val, ahol $\gamma > 0$. A harmadik egy periodikus külső erő, amely hat az inga sebességére az inga minden pozíciójában. Ez a kényszererő legyen $A \cos t$, ahol A egy konstans és t az idő. Ekkor a rendszer felírható egy másodrendű differenciálegyenlettel:

$$mlx''(t) = -mg \sin x(t) - \gamma l x'(t) + A \cos t,$$

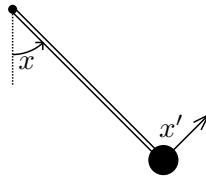
ahol x az inga függőlegessel bezárt szöge, és x' az inga forgási sebessége. A tömeget egységnyinek választva és az inga hosszával (l) leosztva az előző egyenletet az alábbi egyenlethez jutunk:

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t) - \gamma x'(t) + \frac{A}{l} \cos t.$$

A további szabad paraméterek megválaszthatóak úgy ($g = l$ és $A = l$), hogy az alábbi egyenletet kapjuk:

$$x''(t) = -\sin x(t) - 0.1x'(t) + \cos t.$$

Ez az egyenlet fogja vizsgálataink tárgyát képezni. Korábbi, a kapcsolódó irodalombeli eredményekből tudható, hogy az ilyen rendszerek numerikus megoldásai nagyon érzékenyek néhány pont közelében [3].



1.1. ábra. A kényszererős fékezett inga.

A fenti egyenletet felírhatjuk az alábbi formában is:

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

$$x_2'(t) = -0.1x_2(t) - \sin x_1(t) + \cos t,$$

ahol x_1 az inga szöge, míg x_2 az inga szögsebessége.

Az egyik általánosan használt eszközünk a Poincaré-leképezés. Mivel a kényszererő 2π periodikus, így a Poincaré-képeket a $t = 2n\pi$ időpillanatokban vesszük, ahol n egy egész szám. Az ezen időpillanatok között kialakult leképezések azonosak. Így a trajektória követéséhez elegendő a Poincaré-leképezést $(\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2)$ iterálni, melyet az alábbi módon definiálhatunk:

$$\mathcal{P} : (x(0), x'(0)) \mapsto (x(2\pi), x'(2\pi)).$$

Megjegyzendő, hogy ez a Poincaré-leképezés x -ben 2π periodikus, mivel az inga szöge is 2π periodikus, és egyik erő sem függ a körbefordulások számától. De amíg a hagyományos inga szimmetrikus x -ben is, a mi rendszerünk nem az, mivel a kényszererő nem szimmetrikusan hat az inga szimmetrikus szögeiben.

1.1.2. Megbízható módszer a Poincaré-leképezés befoglalására

A bizonyításokhoz a Poincaré-leképezést is megbízható módon kell megadni. Mivel ez a leképezés nem írható fel zárt alakban, így egyetlen megoldás marad, a trajektória követése a $[0, 2\pi]$ időintervallumon. Egy adott pontra a Poincaré-leképezést a trajektória helyzete adja meg a $t = 2\pi$ időpillanatban.

Több megbízható differenciálegyenlet-rendszert megoldó szoftver létezik, melyek szabadon felhasználhatók [2]. A választásunk a könnyű használat, és a széleskörűen elismert teljesítménye miatt a VNODE-ra (Validated Numerical ODE) esett [7]. A csomag működése a Taylor-sorfejtésen alapul. Erőssége az, hogy a lépéshosszt automatikusan választja meg, és így ott végez kisebb lépéseket, ahol ez szükséges. Ezzel a módszerrel nagyobb pontosságot képes elérni. A csomag további előnye, hogy a trajektóriákat időben előre- és hátrafelé is tudja követni.

A program egyetlen hátránya számunkra, hogy csak számítógépen ábrázolható időpillanatokban képes megadni a trajektória helyzetét. A Poincaré-leképezésben szereplő 2π azonban nem ábrázolható számítógépen, így az alábbi átalakítással használjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= \pi, \\ y_1'(t) &= \pi(y_2(t)), \\ y_2'(t) &= \pi(-0.1y_2(t) - \sin y_1(t) + \cos t). \end{aligned}$$

Ebben az esetben a $t = 2$ időpillanatban kapjuk meg a Poincaré-leképezést. A Poincaré-leképezés inverzét pedig a $t = -2$ időpillanatban. Ezen két függvény értékét jelöljük az I 2 dimenziós intervallumra $P(I)$ -vel és $P^{-1}(I)$ -vel.

1.1.3. A periodikus pontok

A kaotikus viselkedésben fontos szerepet játszanak a periodikus pontok. Ezek helyének és stabilitásának vizsgálata szükséges a káosz és stabilitás bizonyításához. Korábbi eredményekből tudható [6], hogy ilyen rendszereknek legalább egy periodikus megoldása van, de ennél többre lesz szükségünk.

Jelen részben csak a Poincaré-leképezés fixpontjaival foglalkozunk, ugyanis léteznek olyan periodikus pontjai az ingának, melyek 2π időközönként ugyanazt az állapotot veszik fel, de közben legalább egyszer körbefordulnak. Sejtethető, hogy egy bizonyos értéknél nagyobb sebességgel mozgó inga nem lehet periodikus. Durva számításokkal az alábbi felső korlátot kapjuk a kaotikus inga sebességére:

$$|x_2| < \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) e^{0.1t} dt < 10.1.$$

A periodikus pontok kereséséhez egy egyszerű megbízható B&B eljárást alkalmaztunk. A keresési terület az

$$(x, x') \in [0, 2\pi] \times [-10.1, 10.1]$$

kezdő intervallum volt. A B&B eljárásunk olyan 2 dimenziós intervallumokat (I_i) generál a kezdő intervallumból, melyekre igaz az alábbi állítások valamelyike:

1. az I_i intervallumnak nincs közös pontja a $P(I_i)$ és $P^{-1}(I_i)$ legalább egyikével, vagy
2. az I_i intervallum kicsi (a felhasználó által beállított méretű), és van közös pontja a $P(I_i)$ -vel és a $P^{-1}(I_i)$ -vel is.

A periodikus pontok csak a második halmazban lehetnek. Következő lépésként az ezen csoportban lévő közös ponttal rendelkező intervallumokat összevonjuk egy nagyobb intervallumba, amely tartalmazza mindkét kisebb intervallumot. Ezt mindaddig csináljuk, míg van ilyen intervallum a csoportban. Ezzel feltehetően pontosan annyi intervallumot kapunk, mint ahány periodikus pontja van a rendszernek, és mindegyiknek egy-egy garantált befoglalását nyerjük. Sajnos ez a technika egyelőre nem zárja ki, hogy egy-egy „dobozban” több vagy akár egy periodikus pont se szerepeljen.

Esetünkben ezen 2 dimenziós intervallumok az alábbiaknak adódtak:

$$(x, x')_1 = ([2.634272, 2.634274], [0.02604294, 0.02604485]),$$

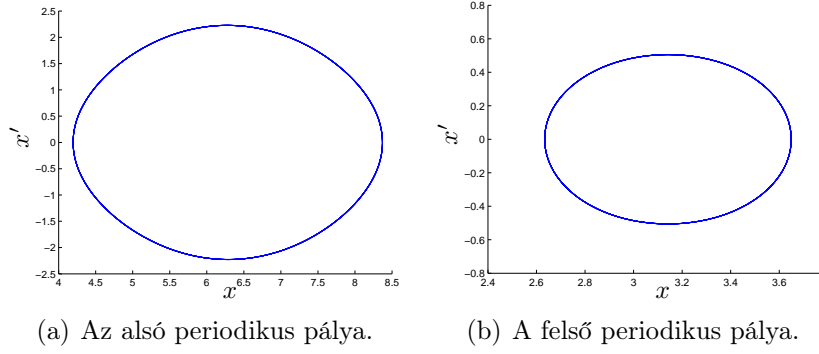
$$(x, x')_2 = ([4.236893, 4.236894], [0.3926964, 0.3926973]).$$

Megvizsgálva a trajektóriákat, azt sejtjük, hogy az első egy felső egyensúlyi pályát, míg a második egy alsó egyensúlyi pályát feltételez (lásd az 1.2. ábrát).

A létezés és az egyértelműség igazolásához a karakterisztikus multiplikátort fogjuk használni. Ezt az úgynevezett variációs egyenlet módszerrel határozzuk meg. Ehhez szükségünk van a jobboldalak x_1 és x_2 szerinti deriváltjaira, melyek a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy az x'_2 -nek az x_1 szerinti deriváltja tartalmazza az x_1 -et, így szükségünk van a megoldásra is, melyet csak numerikusan befoglalva tudunk meg-



1.2. ábra. A periodikus pályák.

adni. Így az alábbi differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t), \\ z_2'(t) &= -0.1z_2(t) - \sin z_1(t) + \cos t, \\ z_3'(t) &= z_4(t), \\ z_4'(t) &= -0.1z_4(t) - z_3(t) \cos z_1(t). \end{aligned}$$

A z_1 és z_2 teljesen azonos az x_1 -gyel, illetve x_2 -vel, és ezek fogják a megoldást minden időpillanatra kiszámolni, míg a z_3 és z_4 a multiplikátorokat tartalmazzák.

Az eljárás során a differenciálegyenlet z_1, z_2 kezdőértékei legyenek az első fixpont koordinátái, valamint $z_3(0) := 1$ és $z_4(0) := 0$. Ezekkel az értékekkel kiszámolt Poincaré-leképezés z_3 és z_4 értékei legyenek egy A_1 2×2 -es mátrix első oszlopa. Az A_1 mátrix második oszlopát hasonlóan számoljuk ki, csak a $z_3(0) := 0$ és $z_4(0) := 1$. Az így adódó mátrix:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [169.6369, 169.6370] & [168.7925, 168.7926] \\ [152.9595, 152.9597] & [152.2012, 152.2014] \end{pmatrix},$$

mely sajátértékeinek befoglalása:

$$\alpha_1^1 = [321.8363, 321.8368],$$

$$\alpha_1^2 = [0.001421, 0.001894].$$

Mivel abszolút értékben az egyik nagyobb, mint 1, a másik pedig kisebb, ezért az $(x, x')_1$ intervallum pontosan 1 instabil fixpontot tartalmazhat.

Hasonlóan a másik 2 dimenziós intervallumra:

$$A_2 = \begin{pmatrix} [-0.7426217, -0.7426218] & [0.09101517, 0.09101522] \\ [-0.04890921, -0.04890920] & [-0.7123905, -0.7123904] \end{pmatrix},$$

melynek sajátértékei

$$\alpha_2^1 = [-0.7275062, -0.7275061] + \sqrt{[-0.01689209, -0.01689190]},$$

$$\alpha_2^2 = [-0.7275062, -0.7275061] - \sqrt{[-0.01689209, -0.01689190]}.$$

Mivel a valós rész abszolút értéke mindkét esetben kisebb mint 1, így ez egy stabil fixpontot tartalmaz.

Jelen dolgozatban a továbbiakban csak az instabil periodikus megoldással foglalkozunk. Ezen pálya stabilizálásával és kontrolljával próbálkozunk meg.

1.2. Az instabil megoldás stabilizálása

1.2.1. Az egyszerű inga stabilizálása

Ismert az a tény, hogy az egyszerű inga felső egyensúlyi állapota instabil. Bizonyított [1], hogy a felfüggesztés megfelelő mozgatásával ezt stabillá lehet tenni. Egy ilyen eredményt érhetünk el a felfüggesztési pont adott periódusú és nagyságú függőleges irányú oszcilláló mozgatásával. Ennek a mozgásnak a gyorsulása legyen

$$\frac{8ap^2}{l} \sin(pt),$$

ahol a a kitérés amplitúdója, l az inga hossza, és p a kitérések száma 2π idő alatt. Ekkor a hagyományos inga differenciálegyenlete az alábbi formában írható fel:

$$x''(t) = \left(-\frac{g}{l} + \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \sin x - \gamma x'.$$

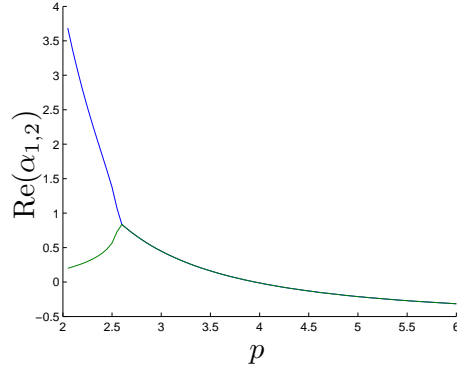
A stabilitás vizsgálatához alkalmazhatjuk a korábban is használt variációs egyenlet módszerét. Jelen esetben ismert, hogy az ingának két fixpontja van, melyek közül az egyik stabil (az alsó egyensúlyi állapot), a másik pedig instabil (a felső egyensúlyi állapot). Vizsgálataink most a felső egyensúlyi állapotra koncentrálódnak és ezt szeretnénk stabillá tenni. A fenti egyenlet periódusideje $\frac{2\pi}{p}$, azaz ilyen hosszan fogjuk vizsgálni a variációs egyenletrendszert. Ezen idő alatt a periodikus pálya ismert (konstans π), így nincs szükségünk a pálya kiszámítására. Ezen észrevételekkel az egyenletrendszer az alábbi módon adható meg:

$$\begin{aligned} z_3'(t) &= z_4(t), \\ z_4'(t) &= \left(-\frac{g}{l} + \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) z_3(t) - \gamma z_4(t). \end{aligned}$$

További vizsgálatainkban a kaotikus kényszererős fékezett ingához legjobban hasonlító rendszert vizsgáltuk, azaz $\gamma = 1$ és $l = g = 9.81$. Megvizsgáltuk, hogy milyen gyorsan kell mozgatni a felfüggesztési pontot, ha azt szeretnénk, hogy a felső egyensúlyi állapot stabilizálódjon. Ehhez az kell, hogy teljesüljön az, hogy a fent említett differenciálegyenlet-rendszerrel kapott mátrix sajátértékeinek abszolút értékei 1-nél kisebbek legyenek. Konstans $a = 1$ és különböző p paraméterek mellett az 1.3. ábra jeleníti meg ezen értékeket.

1.2.2. A kényszererős fékezett inga stabilizálása

Az előző módszer analógiájára, a kaotikus kényszererős fékezett inga stabilizálásával próbálkozunk. Legyen a kényszererős fékezett inga felső instabil periodikus



1.3. ábra. Az sajátértékek valós részének abszolút értékének alakulása.

megoldásának a szöge az idő függvényében $\hat{x}(t)$. Az előző eredmények alapján sejt-hető, hogy egy $\hat{x}(t)$ irányú és $\frac{8ap^2}{l} \sin(pt)$ értékkel gyorsuló felfüggesztési ponttal rendelkező kényszererős fékezett ingának stabilizálódik a felső instabil egyensúlyi pályája valamely a és p paraméterre. Ebben az esetben a középpont függőleges irányú gyorsulása:

$$\cos(\hat{x}(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) = \omega_f,$$

a vízszintes irányú gyorsulása pedig:

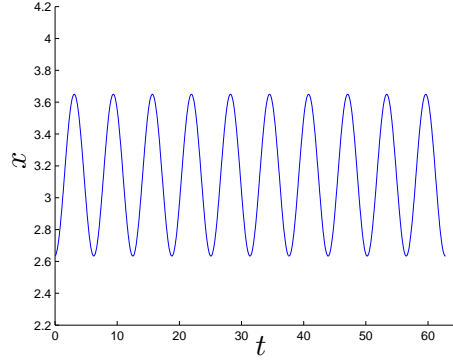
$$\sin(\hat{x}(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) = \omega_v.$$

Ekkor az alábbi formában írható fel a differenciálegyenlet:

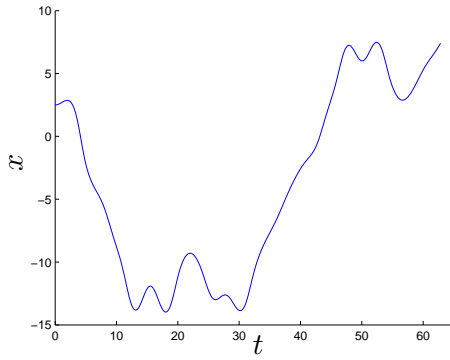
$$x''(t) = (-1 - \omega_f) \sin(x) + \omega_v \cos(x(t)) - 0.1x' + \cos(t).$$

Az $a = 0.5$ és $p = 4$ paraméterekkel következett be egy stabilizálódás. Ezt mutatja az 1.4. ábra. Az 1.4(a) ábrán az inga szögének alakulását láthatjuk az idő függvényében a felső instabil állapotban. Ezzel a mozgatással ezt az instabil állapotot szeretnénk stabilizálni. Egy közeli állapotból indított inga szögének alakulását láthatjuk az 1.4(b) ábrán. Majd ugyanezen állapotból a mozgással ellátott rendszer alakulását mutatja az 1.4(c) ábra. Sejthető, hogy ezen külső mozgítás hatására az inga szöge tart a felső pályához és ez stabilizálja a tekintett pályát.

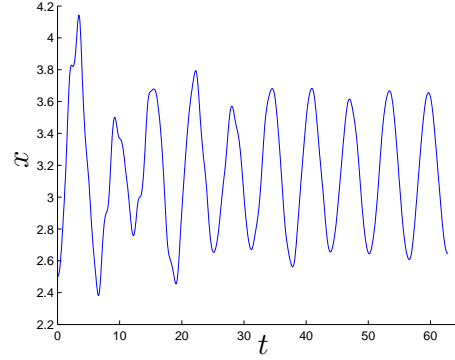
A bizonyításhoz a Poincaré-metszeteken alkalmazott multiplikátor módszert alkalmazzuk. Ennek vizsgálatához a kényszererő periódusának, és a középpont gyorsulásának periódusának összemérhetőnek kell lennie. Ez jelen esetben igaz, és a minimális közös periódus 2π . A vizsgálandó differenciálegyenlet az alábbi módon



(a) Felső instabil pálya.



(b) Kontroll nélküli kaotikus mozgás.



(c) Kontrollált mozgás.

1.4. ábra. A kényszererős inga stabilizálódása.

alakul:

$$\begin{aligned}
 z_1'(t) &= z_2'(t), \\
 z_2'(t) &= -0.1z_2(t) - \sin(z_1(t)) + \cos(t), \\
 z_3'(t) &= z_4'(t), \\
 z_4'(t) &= \left(-1 - \cos(z_1(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \sin(z_3(t)) + \\
 &\quad + \left(\sin(z_1(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \cos(z_3(t)) - 0.1z_4(t) + \cos(t), \\
 z_5'(t) &= z_6'(t), \\
 z_6'(t) &= \left(\left(-1 - \cos(z_1(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \right) \cos(z_3(t)) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\sin(z_1(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) \sin(pt) \right) \sin(z_3(t)) \right) z_5(t) - bz_6(t).
 \end{aligned}$$

A z_1 és z_2 megegyezik az eredeti kényszererős fékezett inga egyenletrendszerével. Ennek feladata a periodikus megoldás kiszámítása, mely segítségével meg tudjuk határozni a középpont gyorsulásának irányát. A stabilizáló mozgással ellátott egyenletrendszert alkotja a z_3 és z_4 , míg a multiplikátorok számítását a z_5 és z_6

végzi.

Ekkor a korábban ismertett módszerrel kapott mátrix két sajátértéke a felső, kezdetben instabil megoldásra:

$$\lambda^1 = [-0.416498, -0.415888] + [0.59792, 0.602524]i,$$

és

$$\lambda^2 = [-0.416498, -0.415888] - [0.59792, 0.602524]i,$$

azaz ez a pálya a rezegtetéssel stabil.

Vegyük észre, hogy az ω_f és az ω_v gyorsulások nem függnak az éppen aktuális inga állapotaitól – sem a sebességétől, sem a szögétől. Ezen függvényekben csak a felső instabil pálya megoldása szerepel, melyet akár előre kiszámíthatunk és eltárolhatunk. Tehát a jelen problémán alkalmazott mozgatus a nem visszacsatolós technikák körébe tartozik.

1.3. Egy visszacsatolós kontroll függvény

1.3.1. Az egyszerű inga kontroll függvénye

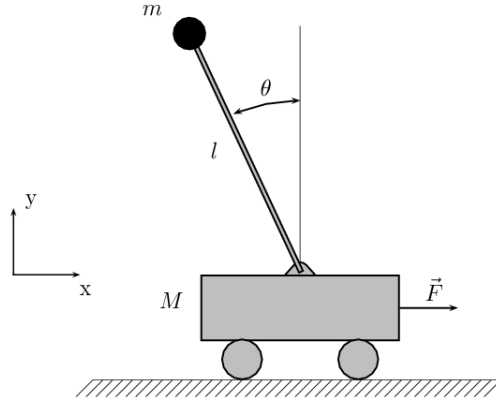
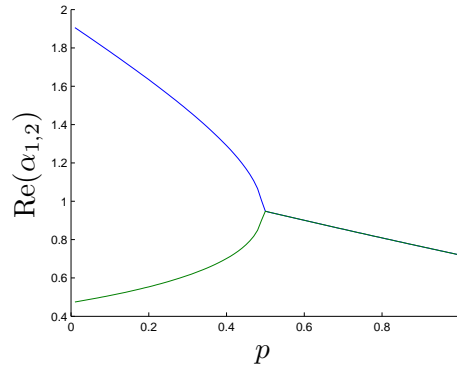
A szakirodalmakban gyakran vizsgált mechanikai rendszer a fordított inga (inverted pendulum). Ezt gyakran úgy prezentálják, hogy egy kicsi kocsin van egy álló – nem lógó – inga (lásd az 1.5. ábrán). A kocsi azt a szerepet tölti be, hogy az inga „felfüggesztési” pontját jobbra, illetve balra lehessen mozgatni. Ezen mozgással, pontosabban ilyen irányú erővel próbálják a kocsin lévő ingát függőleges helyzetben tartani, azaz az eredetileg instabil állapotát stabilizálni. Az erő nagysága rendszerint függ az inga függőlegessel éppen bezárt szögétől, továbbá néhány esetben az inga forgási sebességétől is. Mivel itt a dinamikai rendszerre ható külső erő nagysága függ az éppen aktuális inga állapotaitól, így ezen stabilizáló hatást a visszacsatolós technikák közé sorolják. Jelen dolgozatban a rendszerre ható erő csak a inga szögétől fog függni, továbbá csak a folytonos visszacsatolással fogunk foglalkozni.

Először vizsgáljuk meg a hagyományos, kényszererő nélküli fékezett ingára gyakorolt hatását az ilyen típusú erőnek. Az erő nagysága függjön az inga függőlegessel éppen bezárt szögétől lineárisan, azaz a felfüggesztési pontra ható erő nagysága legyen:

$$p(x - \pi),$$

ahol p egy paraméter. Majd ezen rendszer stabilitásának vizsgálatához használjuk ismét a variációs egyenlet módszerét. Így a multilikátor kiszámításához használt differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t), \\ z_2'(t) &= -\sin(z_1(t)) + p(z_1(t) - \pi)\cos(z_1(t)) - 0.1z_2(t), \\ z_3'(t) &= z_4(t), \\ z_4'(t) &= ((-1 + p)\cos(z_1(t)) - p(z_1(t) - \pi)\sin(z_1(t)))z_3(t) - 0.1z_4'(t). \end{aligned}$$

1.5. ábra. A fordított inga (a www.wikipedia.com-ról).

1.6. ábra. Az sajátértékek valós részének abszolút értékének alakulása.

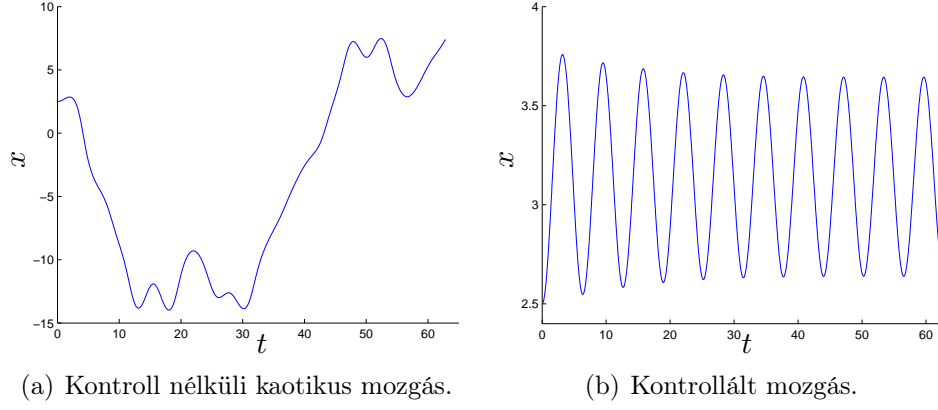
Jelen esetben nincs periodikusság a rendszerben, így nem kell hozzá igazítani a vizsgálandó idő nagyságát. Megjegyzendő, hogy a idő nagysága nem befolyásolja a sajátértékek 1-hez viszonyított helyzetét, csak a tőle lévő távolságát. Ezen észrevétel után vizsgáljuk meg, hogyan alakul a felső kezdetben instabil állapot stabilizálása a p paraméter függvényében. Az így kapott multiplikátorokat láthatjuk, az 1.6. ábrán. Az ábrán észrevehető, hogy körülbelül $p = 0.5$ -nél lesz mindkét sajátérték valós része 1-nél kisebb, azaz ekkor következik be a stabilizálódás.

1.3.2. A kényszererős fékezett inga kontroll függvénye

Az előző fordított inga stabilizálásának analógiájára próbálkozzunk meg az általunk vizsgált kényszererős fékezett inga stabilizálásával. Ismét legyen a felső instabil megoldás az $\hat{x}(t)$. Ezen megoldás stabilizáláshoz felhasznált vízszintes erő nagysága függjön az inga szöge és ezen $\hat{x}(t)$ megoldás különbségétől lineárisan. Azaz az erő nagysága legyen

$$p(x(t) - \hat{x}(t)),$$

ahol p egy paraméter.



1.7. ábra. A kényszererős inga stabilizálódása.

Ezzel a plussz külső erővel a kényszererős fékezett ingánk differenciálegyenlete az alábbi módon alakul:

$$x''(t) = -\sin(x) + p(x(t) - \hat{x}(t)) \cos(x(t)) - 0.1x' + \cos(t).$$

Jelen esetben a $p = 2$ -nél tapasztaltunk stabilizálódást, mely látható az 1.7. ábrán.

Ennek bizonyításához, szintén a multiplikátor módszerét fogjuk alkalmazni. A multiplikátorok kiszámításához az alábbi differenciálegyenlet-rendszert kell vizsgálni:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2'(t), \\ z_2'(t) &= -\sin(z_1(t)) - 0.1z_1(t) + \cos(t), \\ z_3'(t) &= z_4'(t), \\ z_4'(t) &= -\sin(z_3(t)) - 0.1z_4(t) + 2(z_3(t) - z_1(t)) \cos(z_3(t)) + \cos(t), \\ z_5'(t) &= z_6'(t), \\ z_6'(t) &= (-\cos(z_3(t)) + 2\cos(z_3(t)) - 2(z_3(t) - z_1(t)) \sin(z_3(t))) z_5(t) - 0.1z_6(t). \end{aligned}$$

A z_1 és a z_2 ismét megegyezik az eredeti kényszererős inga egyenletrendszerével, melynek szerepe az éppen aktuális periódikus megoldás nyilvántartása, míg a z_3 és z_4 kontrollal ellátott egyenletrendszer, a z_5 és z_6 pedig a multiplikátorok kiszámítását végzi.

A módszerrel kapott mátrix sajátértékeire az alábbiakat kaptuk:

$$\lambda^1 = [0.718038, 0.718075] + [1.33514, 1.33939] i,$$

és

$$\lambda^2 = [-0.416498, -0.415888] - [1.33514, 1.33939] i,$$

azaz ez a pálya a kontrollal stabil.

Irodalomjegyzék

- [1] V.I. Arnold: *Közönséges differenciálegyenletek*. 1978, Műszaki Könyvkiadó (Budapest).
- [2] M. Berz – K. Makino – K. Shamseddine – G. Hoffstätter – W. Wan: COSY INFINITY and its applications to nonlinear dynamics. In M. Berz – C. Bischof – G. Corliss – A. Griewank (szerk.): *Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools*. 1996, SIAM (Philadelphia), 363–365. p. Proceedings of the SIAM Workshop on the Automatic Differentiation of Algorithms, Santa Fe (New Mexico, USA).
- [3] R. Borrelli – C. Coleman: Computers, lies and the fishing season. 25. évf. (1994), *The College Mathematics Journal*, 401–412. p.
- [4] J. Hubbard: The forced damped pendulum: Chaos, complication and control. 106. évf. (1999), *American Mathematical Monthly*, 741–758. p.
- [5] J. Hubbard – B. West: *ODE Architect Companion, Lab book*. Chaos and Control fejezet. 1999, John Wiley & Sons (New York), 221–232. p.
- [6] J. Mawhin: Periodic oscillations of forced pendulum-like equations. 964. évf. (1982), *Ordinary and Partial Differential Equations*, 458–476. p.
- [7] VNODE Package home page.
<http://www.cas.mcmaster.ca/~nedialk/Software/VNODE/VNODE.shtml>.